UNELE APLICAȚII ALE FORȚELOR DE INERȚIE

Mircea COLPAJIU, UTM, Chişinău
Stefan TIRON, USM, Chişinău

În articolul precedent (*Revista de fizică, nr. 2, 1995*) s-a fost menționat că atunci când se înlocuieşte forța gravitațională cu forța de greutate $m\boldsymbol{g}$, de fapt se introduce forța de inerție, adică o componentă a forței de greutate.

Vom considera un corp de masă m, lansat vertical în sus şi vom nota cu $\boldsymbol{v}_r$ viteza acestuia în raport cu sistemul de referință solidar cu Pământul. Evident, în punctul superior al traiectoriei $\boldsymbol{v}_r = 0$. Vom cerceta acest caz particular pentru a exclude forța de inerție Coriolis $\boldsymbol{\Phi}_c = -2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$. De fapt, forța Φ_c poate fi neglijată chiar şi la viteze v_r nu prea mari, deoarece ω este o mărime destul de mică ($\omega = 7{,}292\cdot10^{-5}$ rad/s) şi deci accelerația Coriolis este mult mai mică decât accelerația imprimată de forța gravitațională. Fie corpul la latitudinea φ (fig. 1) şi la altitudinea h mică, adică $h << R$, unde R este raza Pământului considerat sferic. Neglijând mişcarea de revoluție a Pământului în jurul Soarelui, sistemul de referință O_1xyz solidar cu Pământul este în mişcare de rotație în jurul axei fixe Oz sau O_1z cu viteza unghiulară constantă $\omega = 7{,}292\cdot10^{-5}$ rad/s.

În cazul când această problemă se rezolvă în sistemul neinerțial de referință legat de Pământ, în ecuația fundamentală a dinamicii trebuie introduse şi forțele de inerție:

$$m\boldsymbol{a} = \sum\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{\Phi}_t . \qquad (1)$$

Din toate forțele ce acționează şi în sistemul de referință inerțial, aici a fost separată forța gravitațională $F_g = G\cdot m\cdot M_T/r^2$, orientată spre centrul Pământului (fig. 1) (M_T este masa Pământului). Accelerația de transport a_t este orientată spre axa de rotație Oz a Pământului şi în modul este egală cu $O_1M\cdot\omega^2 = R\cdot\omega^2\cdot\cos\varphi$.

Rezultanta forțelor $\boldsymbol{F}_g$ şi $\boldsymbol{\Phi}_t$ este numită forță de greutate, adică

$$m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{\Phi}_t . \qquad (2)$$

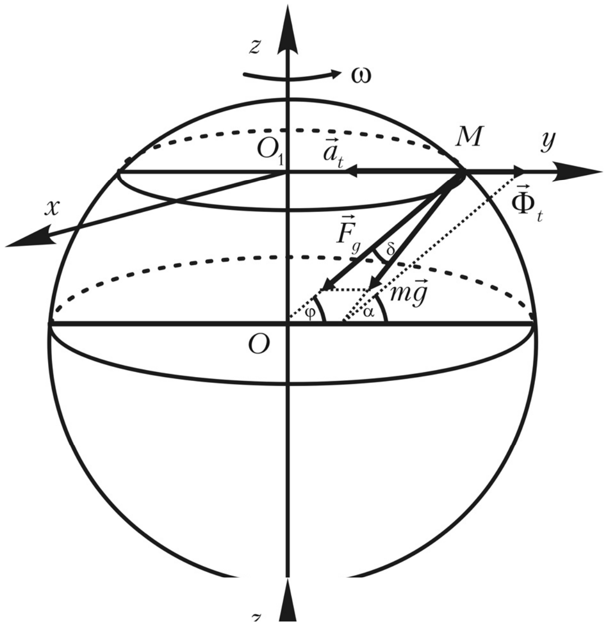

Fig. 1

Aici $\boldsymbol{\Phi}_t = m\boldsymbol{a}_t$, iar $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{\Phi}_t)/m$ este numită accelerația de cădere liberă. Direcția accelerației de cădere liberă, deci şi a forței de greutate nu coincide cu direcția forței gravitaționale şi este determinată de unghiul α. Deci, verticala definită ca direcția forței $m\boldsymbol{g}$ nu trece prin centrul Pământului. Suportul forței $m\boldsymbol{g}$ face cu raza Pământului unghiul δ care poate fi calculat din ecuația (2) proiectată pe axele de coordonate O_1y şi O_1z:

$$tg\,\delta = R\,\omega^2 \sin\varphi\cdot\cos\varphi\,/(g_0 - R\cdot\omega^2\cdot\cos^2\varphi) , \qquad (3)$$

unde $g_0 = GM_T/R^2$ este accelerația cauzată de forța gravitațională, adică accelerația unui corp în cădere liberă spre Pământ față de sistemul de referință inerțial.

Aşadar, ecuația fundamentală a dinamicii scrisă în raport cu sistemul de referință solidar cu Pământul trebuie să conțină $\boldsymbol{g}$, nu $\boldsymbol{g}_0$:

$$m\boldsymbol{a} = \sum\boldsymbol{F}_k + m\boldsymbol{g}. \qquad (4)$$

De notat că aici $\boldsymbol{a}$ este accelerația relativă în raport cu Pământul, adică $\boldsymbol{a}_r$, însă indicele r a fost omis, pentru că ne-am obişnuit ca forța $m\boldsymbol{g}$ să fie considerată reală, şi deci sistemul de referință solidar cu Pământul – inerțial. Numai în acest caz se poate spune că ecuația (4) exprimă legea a doua a lui Newton.

În problemele ce urmează vom considera sistemul de referință solidar cu Pământul drept un sistem inerțial în care acționează forța de greutate (aşa cum s-a procedat în articolul precedent la rezolvarea problemei 1).

Vom rezolva acum următoarea problemă din acelaşi articol:

Problema 1. **Un disc orizontal de rază R se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω. Discul este prevăzut cu un uluc radial luciu ($\mu = 0$). În uluc se pune un corp, fără viteză inițială în raport cu el, la distanța R_0 de la centrul discului. Cu ce viteză în raport cu sistemul de referință mobil (solidar cu discul) va abandona acest corp discul ?**

În sistemul de referință mobil *Oxyz* solidar cu discul, teorema energiei cinetice se scrie sub forma:

$$mv_r^2/2 - 0 = L. \qquad (5)$$

Lucru mecanic efectuează numai forța $\Phi_t = OM \cdot \omega^2$, fiindcă celelalte forțe (forța de greutate, forța Coriolis, reacțiunile $\boldsymbol{N}_1$ şi $\boldsymbol{N}_2$ ale ulucului) sunt perpendiculare pe deplasarea relativă şi deci în sistemul de referință mobil lucrul lor este nul. Forța Φ_t este variabilă, ea fiind direct proporțională cu OM, fapt care ne permite să folosim valoarea ei medie (media aritmetică) pentru a calcula lucrul mecanic:

$$L = \Phi_m \cdot \Delta x = (\Phi_0 + \Phi) \cdot (R - R_0)/2 = m\omega^2 \cdot (R^2 - R_0^2)/2. \qquad (6)$$

Folosind această expresie pentru L, din (5) se poate obține viteza finală a corpului în raport cu ulucul:

$$V_r = \omega\sqrt{R_2 - R_0^2}\ .$$

În cazul când pereții ulucului nu sunt lucii, adică există forța de frecare, problema este mult mai complicată. Reacțiunea N_2 este egală în modul cu $\Phi_c = 2\omega \cdot v_r$ şi deci $F_f = 2\mu m\omega v_r$. În acest caz forța de frecare la alunecare depinde de viteza corpului, de unde şi complexitatea problemei.

Vom stabili acum legea mişcării corpului în ulucul luciu, adică în direcția axei Ox. În sistemul de referință solidar cu ulucul, ecuația fundamentală a dinamicii se scrie sub forma:

$$m\boldsymbol{a}_r = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{\Phi}_c + \boldsymbol{\Phi}_t.$$

Proiectând această ecuație pe axa Ox şi ținând seama că $a_{2x} = d^2x/dt^2$, iar $\Phi_t = mx\omega^2$, obținem ecuația diferențială

$$d^2x/dt^2 - \omega^2 x = 0.$$

Prin substituție ne putem convinge că soluția acestei ecuații este

$$x(t) = \frac{R_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{\div\omega t}\right) \qquad (7)$$

şi ea satisface datele problemei, adică condițiile inițiale: $x = R_0$, $(dx/dt)_0 = 0$ la $t = 0$.

Având în vedere că viteza relativă $v_r = dx/dt$ şi eliminând timpul t din $x(t)$ şi $N_r(t)$, se obține:

$$v_r = \omega\sqrt{R^2 - R_0^2}\ . \qquad (8)$$

Problema 2. **În condițiile problemei precedente, să se determine intensitatea câmpului electric ce va lua naştere în disc, dacă acesta e metalic.**

Aceasta este problema 455 din culegerea *B. A. Balaş "Probleme de fizică şi metode de rezolvare", Lumina, Chişinău, 1970*. Pentru a o rezolva, putem folosi fig. 2, considerând un electron drept corpul M şi introducând forța $e\boldsymbol{E}$ orientată spre centrul discului. În afară de aceasta, vom omite viteza relativă, deci şi forța $\boldsymbol{\Phi}_c$, întrucât

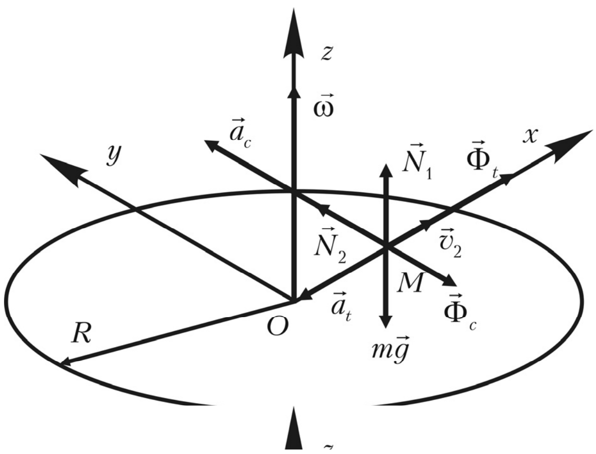

Fig. 2

electronii din metal sunt în echilibru (în disc lipseşte curentul electric care a existat doar un interval de timp foarte scurt, necesar pentru redistribuirea electronilor).

În acest caz, ecuația fundamentală a dinamicii în sistemul de referință neinerțial solidar cu discul se scrie sub forma:

$$\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + m_e\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\Phi}_t + e\boldsymbol{E} = 0.$$

Proiectând această ecuație pe axa Ox, obținem:

$$\Phi - eE = 0 \text{ sau } \omega^2\, OM = eE,$$

de unde rezultă că $E = (m_e/e)\cdot\omega^2\cdot OM$, adică intensitatea câmpului electric variază de-a lungul razei discului de la 0 la $m_e\omega^2R/e$. Deci, răspunsul dat în culegerea citată este valabil numai la marginea discului.

Problema 3. **Pe o masă orizontală cu asperități se află un corp omogen în formă de paralelipiped de înălțime *H*, a cărui bază este un pătrat cu latura *l*. Ce accelerație maximă, în direcție orizontală, poate avea masa pentru ca corpul să nu se răstoarne? Să se determine valoarea minimă a coeficientului de frecare la care corpul nu va aluneca pe masă până la răsturnare.**

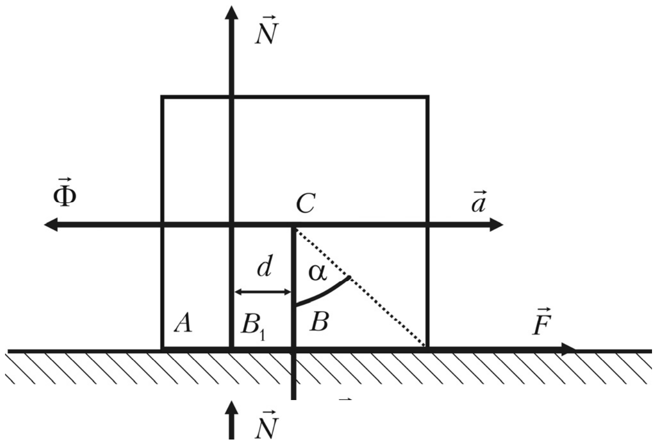

Fig. 3

În sistemul de referință solidar cu masa, corpul este în echilibru sub acțiunea a patru forțe: forța de greutate $m\boldsymbol{g}$, forța de frecare $\boldsymbol{F}$, reacțiunea normală $\boldsymbol{N}$ şi forța de inerție $\boldsymbol{\Phi}$. Forța de greutate este aplicată în centrul de greutate al corpului şi reprezintă rezultanta tuturor forțelor de greutate $m_i\boldsymbol{g}$ ce acționează asupra particulelor corpului, ele având una şi aceeaşi accelerație $\boldsymbol{g}$. Întrucât corpul are o mişcare de translație, asupra fiecărei particule va acționa forța de inerție $m_i(-\boldsymbol{a})$, accelerația $\boldsymbol{a}$ fiind una şi aceeaşi pentru toate particulele. Forța de inerție $\boldsymbol{\Phi}$ fiind rezultanta forțelor $m_i(-\boldsymbol{a})$, ea de asemenea va fi aplicată în centrul de greutate C, adică în centrul maselor. Suportul forței de frecare este în planul de tangență al corpurilor în contact, adică în planul mesei. Suportul forței $\boldsymbol{N}$ nu poate să treacă prin centrul de greutate al corpului, cum se obişnuieşte să se reprezinte această forță. Dacă ar fi aşa, atunci cele trei forțe, $m\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{N}$ şi $\boldsymbol{F}$, ar avea momentul nul în raport cu punctul B. În acest caz ar rămâne numai momentul forței $\boldsymbol{\Phi}$ egal în modul cu $\Phi\cdot H/2 = ma\cdot H/2$ care, nefiind "împiedicat" de nici un alt moment, ar face ca corpul să se rostogolească în sens antiorar la orice valoare, oricât de mică, a accelerației $\boldsymbol{a}$. Pentru ca corpul să rămână în echilibru, suportul forței $\boldsymbol{N}$ se deplasează spre stânga la distanța d de la suportul forței $m\boldsymbol{g}$ până când momentul ei $N\cdot d$ în raport cu punctul B devine egal în modul cu momentul forței $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\Phi\cdot H/2 = N\cdot d \quad \text{sau} \quad ma\cdot H/2 = mg\cdot d,$$

de unde

$$d = aH/2g. \tag{9}$$

Ne putem uşor convinge că suma momentelor tuturor forțelor în raport cu punctul A, în jurul căruia poate avea loc răsturnarea, este de asemenea egală cu zero atâta timp cât suportul forței $\boldsymbol{N}$ nu ajunge până la acest punct:

$$\Phi\cdot H/2 + N\cdot(l/2 - d) - mg\cdot l/2 = \Phi\cdot H/2 - N\cdot d = 0.$$

Conform formulei (9), distanța d creşte odată cu creşterea accelerației a, însă nu poate depăşi valoarea $l/2$. Punând în ecuația (9) $d = l/2$, obținem:

$$a_1 = lg/H. \tag{10}$$

La valori mai mari ale accelerației a momentul forței $\boldsymbol{\Phi}$ în raport cu punctul A este mai mare decât momentul forţei $\boldsymbol{mg}$ faţă de acelaşi punct şi, ca urmare, corpul se va roti în jurul punctului A în sens antiorar.

Pentru ca corpul să nu alunece pe masă până la răsturnare, este necesar ca forța $\Phi_1 = ma_1$ să fie mai mică ca valoarea maximă a forţei de frecare la alunecare:

$$ma_1 < \mu mg\ ,$$

de unde, ținând seama de (10), rezultă:

$$\mu > l/H \quad \text{sau} \quad \mu > tg\,\alpha\ .$$

Acest exemplu ne permite să abordăm problema forțelor de inerție sub un alt aspect, mai profund.

Poziția suportului forței $\boldsymbol{N}$ față de centrul maselor se schimbă în funcție de valoarea accelerației a. De asemenea, se schimbă şi poziția suportului forței de frecare față de C, însă în dependență de forma corpului. În mişcarea de translație, suportul forței de inerție, ca şi cel al forței de greutate trece totdeauna prin centrul maselor. În afară de aceasta, masa gravitațională din forța de greutate este echivalentă cu masa inertă din forța de inerție. Forțele de inerție, ca şi cele gravitaționale, sunt forțe de volum sau masice. Din toate acestea se desprinde concluzia că forțele de inerție sunt echivalente cu forțele gravitaționale. Această echivalență a fost pusă la baza teoriei relativității generalizate a lui Einstein.

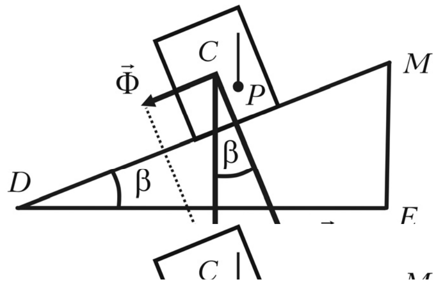

Fig. 4

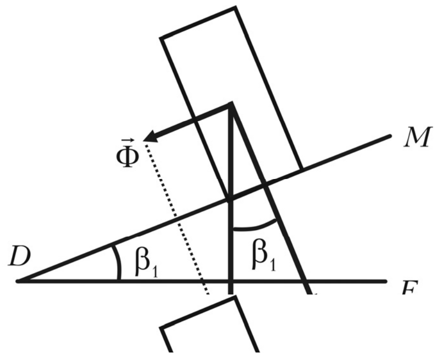

Fig. 5

Principiul echivalenței forțelor gravitaționale şi a celor de inerție se poate enunța astfel: în câmpul gravitațional toate procesele fizice au loc la fel ca şi în câmpul forțelor de inerție, dacă în punctul respectiv din spațiu intensitățile celor două câmpuri coincid, iar condițiile inițiale sunt aceleaşi pentru toate corpurile unui sistem închis. Astfel, mişcarea accelerată a corpului din exemplul examinat mai sus este echivalentă cu mişcarea sub acțiunea unei forțe gravitaționale suplimentare. Lucrurile se întâmplă aşa de parcă corpul s-ar afla nu pe o suprafață orizontală, ci pe un plan înclinat. Planul orizontal se defineşte ca planul perpendicular pe forța de greutate. În cazul reprezentat în fig. 3 forța de greutate rezultantă este:

$$m\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{\Phi} + m\boldsymbol{g} = m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}).$$

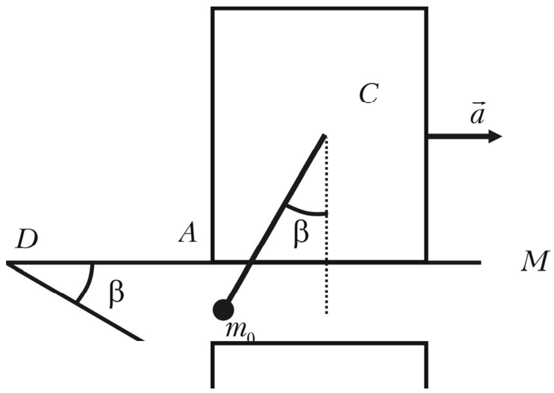

Fig. 6

Făcând ca orizontala să fie perpendiculară pe $\boldsymbol{g}_1$, vom obține fig. 4, în care suprafața mesei face unghiul β cu noua orizontală DE. Din figură se vede că

$$tg\,\beta = \Phi/mg = ma/mg = a/g. \qquad (11)$$

Problema echilibrului unui corp pe planul înclinat este bine cunoscută. Din (11) se observă că creşterea accelerației duce la mărirea unghiului β, adică este echivalentă cu rotația suprafeței mesei în jurul punctului D. Corpul se va răsturna în momentul când suportul forței de greutate $m\boldsymbol{g}_1$ va trece prin punctul A (fig. 5). În acest caz putem scrie:

$$tg\,\beta_1 = l/H. \qquad (12)$$

Din (11) şi (12) rezultă că $a_1 = l\cdot g/H$, adică din nou se obține rezultatul (10). Într-adevăr, un observator situat lângă corpul din fig. 3 s-ar simți ca şi cum s-ar afla pe un plan înclinat fix care face unghiul $\beta = a/g$ cu orizontala. Un pendul va arăta că în sistemul mobil de referință planul orizontal este planul *DE* şi nu planul mesei *DM*, care este orizontal pentru observatorul de pe Pământ (fig. 6).

Propunem o experiență care poate confirma rezultatele obținute în această problemă pe cale teoretică.

Vom lega de corpul din fig. 3 un pendul gravitațional (matematic) de masă neglijabilă m_0 în comparație cu masa corpului (fig. 6). Determinarea unghiului β dintre firul pendulului şi verticală este o problemă bine cunoscută în care se obține rezultatul (11). În momentul când corpul începe să se rostogolească $a = a_1 = l{\cdot}g/H$ (vezi formula (10)) şi firul pendulului va face cu verticala unghiul β_1 pentru care $tg\, \beta_1 = a_1/g = l/H$, ceea ce înseamnă că firul va trece prin punctul *A*. Deci, pentru a preveni răsturnarea corpurilor trebuie să legăm un pendul de axa care trece prin centrul maselor şi să avem grijă ca accelerația imprimată corpurilor să fie mai mică decât aceea la care firul pendulului ajunge la punctul *A*.

Problema 4. **Un cub de lemn având muchia l şi densitatea ρ se află într-un vas cu apă, a cărei densitate este ρ_0 . Să se determine înălțimea h a părții de deasupra apei a corpului în două cazuri: a) vasul este în repaus în raport cu Pământul; b) vasul se mişcă cu accelerația a față de Pământ.**

a) În primul caz, cubul este în repaus sub acțiunea forței de greutate şi a forței arhimedice:

$$\rho g V = \rho_0 g V_1,$$

unde $V = l^3$ este volumul corpului, iar $V_1 = l^2(l-h)$ este volumul lichidului dezlocuit de corp. De aici se obține:

$$h = l(\rho_0-\rho)/\rho_0. \qquad (13)$$

b) În cazul al doilea, accelerația de cădere liberă $\boldsymbol{g}$ se înlocuieşte cu accelerația $\boldsymbol{g_1} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. În rest, raționamentele sunt aceleaşi ca în cazul precedent şi se obține acelaşi rezultat (13). Deci, dacă privim cubul ce pluteşte în apă dintr-un ascensor, nu putem stabili dacă mişcarea ascensorului este accelerată sau nu.

Problema 5. **De câte ori durata cât se separă frişcă într-un separator este mai scurtă decât într-un ulcior simplu ? Tamburul separatorului are raza de 0,1 m şi efectuează 3000 rot/min.**

În cazul ulciorului, asupra unei bule de grăsime de rază *r* acționează trei forțe: forța de greutate $m\boldsymbol{g}$, forța arhimedică $\boldsymbol{F_A}$ şi forța de rezistență a plasmei $\boldsymbol{F}$. Când viteza devine constantă, avem:

$$F_A = mg + F. \qquad (14)$$

Se ştie că la viteze mici forța de rezistență a mediului este proporțională cu viteza bulei: $F = kv$, unde $k = 6\pi\eta r$. La temperatura de 20°C coeficientul $\eta \approx 0{,}0018$ kg/m·s. Cunoscând densitatea plasmei, $\rho_0 \approx 1{,}0338{\cdot}10^3$ kg/m^3 , şi densitatea bulei de grăsime, $\rho = 0{,}9304{\cdot}10^3$ kg/m^3 , se poate obține, din (14), viteza bulei de grăsime în ulcior:

$$v = 2gr^2(\rho_0 - \rho)/9\eta.$$

În cazul unui ulcior cu înălțimea $H = 0{,}2$ m şi a bulelor de grăsime cu raza $r = 2{\cdot}10^{-6}$ m la temperatura de 20°C durata de timp în care grăsimea ajunge la suprafață este $t_1 = H/v \approx 4{,}8$ zile.

În cazul când laptele este în separator, în baza principiului echivalenței forțelor gravitaționale şi a forțelor de inerție accelerația g poate fi înlocuită cu $\sqrt{g^2 + R^2\omega^4} \approx R\,\omega^2$. Deci, în separator viteza bulelor de grăsime este de $R\omega^2/g$ ori mai mare decât în ulcior. În acest caz, timpul de separare a grăsimii, t_s , este de circa 1000 de ori mai mare decât în primul caz: $t_s/t_1 = g/R\omega^2$. De notat că neglijând forța de rezistență a plasmei, raportul t_s/t_1 devine egal cu $\sqrt{g/R\omega^2}$, însă această aproximație nu este valabilă, deoarece asta ar însemna că grăsimea iese la suprafață chiar în procesul mulsului. Într-adevăr, în acest caz bulele de grăsime s-ar mişca cu accelerația constantă $(\rho_0 - \rho)g/\rho \approx 0{,}1$ m/s^2.