APLICAREA REGULII LUI MARINA LA CALCULUL SISTEMELOR STATIC NEDETERMINATE

E.Savcenco
Universitatea Tehnică a Moldovei

În metodele tradiţionale calculul deplasărilor în bare se efectuează cu ajutorul ipotezei secţiunilor plane, care nu permite studiul influenţei forţelor tăietoare asupra deplasărilor şi efectul deplanării secţiunii transversale în procesul torsiunii unei bare de secţiune necirculară.

Prof. V.Marina a arătat că relaţiile tradiţionale pentru deplasări în bare şi sisteme de bare pot fi obţinute în baza relaţiilor fundamentale ale Mecanicii corpului solid deformabil. În acest scop au fost folosite relaţiile pentru calculul deplasărilor obţinute de Cezaro:

$$\omega_{ij}^B = \omega_{ij}^A + \int_A^B (d_{ik,j} - d_{jk,i})dx_k \qquad (1)$$

$$u_i^B = u_i^A + \omega_{ij}^A(x_j^B - x_j^A) + \int_A^B [d_{ik} + (d_{ik,j} - d_{jk,i})(x_j^B - x_j)]dx_k \qquad (2)$$

unde prin u_i^B, u_i^A sunt notate deplasările liniare ale punctelor materiale "A" şi "B"; $\omega_{ij}^A, \omega_{ij}^B$ – rotaţiile de corp rigid ale punctelor examinate; d_{ik} – tensorul deformaţie; $d_{ik,j} = \dfrac{\partial d_{ik}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j}$.

Menţionăm că din ecuaţiile de compatibilitate ale deformaţiilor, integralele curbilinii din (1) şi (2) nu depind de drumul de integrare de la A la B.

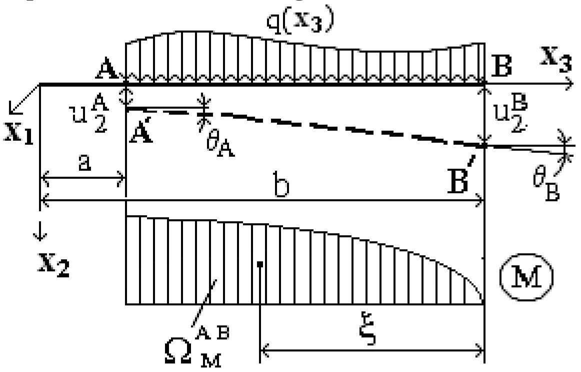


Figura 1. Schema deplasărilor.

Dacă punctele materiale A şi B sunt situate, de exemplu, pe axa barei X_3 atunci din (1) şi (2) rezultă:

$$\omega_{i3}^B = \omega_{i3}^A + \int_a^b (d_{i3.3} - d_{33,i})dx_3 \; ; \qquad (3)$$

$$u_i^B = u_i^A + \omega_{i3}^A(b-a) + \int_a^b [d_{i3} + (d_{i3,3} - d_{33,i})(b - x_3)]dx_3 \qquad (4)$$

unde $a = x_3^A$, $b = x_3^B$.

Tensiunile în bara dreaptă se calculează în sistemul axelor centrale principale. Prin urmare, formulele (3) şi (4) determină deplasările şi rotaţiile de corp rigid ale punctelor materiale situate pe axa barei. Formele integrale sunt raţionale în calcul, dacă influenţa deplasărilor asupra eforturilor este neglijabilă.

În domeniul liniar elastic deformaţiile liniare şi unghiulare care provin de la eforturile N, M_1, M_2, T_1, T_2 se determină cu ajutorul relaţiilor:

$$d_{33} = \frac{1}{E}\left(\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1}x_2 - \frac{M_2}{I_2}x_1\right), \qquad (5)$$

$$d_{31} = \frac{T_1 S_2^*}{2Gb_2 I_2}, \quad d_{32} = \frac{T_2 S_1^*}{2Gb_1 I_1}. \qquad (6)$$

Dacă influenţa deformaţiilor unghiulare asupra deplasărilor (în comparaţie cu d_{33}) poate fi neglijată, atunci în baza (3) - (6), obţinem:

$$\begin{cases} \omega_{23}^B = \omega_{23}^A - \displaystyle\int_a^b \frac{M_1}{EI_1}dx_3 \\ u_2^B = u_2^A + \omega_{23}^A(b-a) - \displaystyle\int_a^b \frac{M_1(b-x_3)}{EI_1}dx_3 \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \omega_{13}^B = \omega_{13}^A - \displaystyle\int_a^b \frac{M_2}{EI_2}dx_3 \\ u_1^B = u_1^A + \omega_{13}^A(b-a) - \displaystyle\int_a^b \frac{M_2(b-x_3)}{EI_2}dx_3 \end{cases} \qquad (8)$$

$$u_3^B = u_3^A + \int_a^b \frac{Ndx_3}{EA} \qquad (9)$$

Dacă rigiditatea pe porţiunea de lungime a barei (b-a) este constantă, atunci din expresiile (7) - (9) obţinem interpretările lui Marina

$$\begin{cases} \omega_{23}^B = \omega_{23}^A - \dfrac{\Omega_{M_1}^{AB}}{EI_1}, \\ u_2^B = u_2^A + \omega_{23}^A(b-a) - \dfrac{S_{M_1AB}^B}{EI_1}; \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} \omega_{13}^{B} = \omega_{13}^{A} - \dfrac{\Omega_{M_2}^{AB}}{EI_2}, \\ u_1^{B} = u_1^{A} + \omega_{13}^{A}(b-a) - \dfrac{S_{M_2AB}^{B}}{EI_2}; \end{cases} \qquad (11)$$

$$u_3^{B} = u_3^{A} + \frac{\Omega_N^{AB}}{EA}, \qquad (12)$$

unde $\Omega_{M_1}^{AB} = \int_a^b M_1 dx_3,\ \Omega_{M_2}^{AB} = \int_a^b M_2 dx_3,$

$\Omega_N^{AB} = \int_a^b N dx_3$ sunt ariile de la diagramele eforturilor $M_1,\ M_2,\ N$ pe sectorul $a \le x_3 \le b$;

$$S_{M_1AB}^{B} = \int_a^b M_1(b-x_3)dx_3,$$

$$S_{M_2AB}^{B} = \int_a^b M_2(b-x_3)dx_3$$

sunt momentele statice ale diagramelor M_1 şi M_2 pe sectorul $a \le x_3 \le b$ faţă de axele care trec prin punctul B în direcţiile deplasărilor. Vom ilustra aplicarea metodologiei noi la calculul barelor static nedeterminate de orice grad de nedeterminare. Se examinează bara din fig.2,a cu momentele de inerţie ale stâlpilor şi cel al riglei respectiv I_1=I şi I_2=0,6I. Bara este dublu static nedeterminată. Se aleg ca necunoscute, componenta orizontală X_1 şi cea verticală X_2 ale reacţiunii din articulaţia D. Se scriu ecuaţiile suplimentare (ecuaţiile de compatibilitate ale deformaţiilor): deplasările verticală şi cea orizontală ale punctului D se anulează.

Deplasările punctului D, verticala u_D^z şi orizontala u_D^y, se determină prin relaţiile lui Marina:

$$u_D^z = u_A^z + \theta_A(y_D - y_A) - S_{MAB}^{Dz}/EI_1 - \\ - S_{MBC}^{Dz}/EI_2 - S_{MCD}^{Dz}/EI_1; \qquad (13)$$

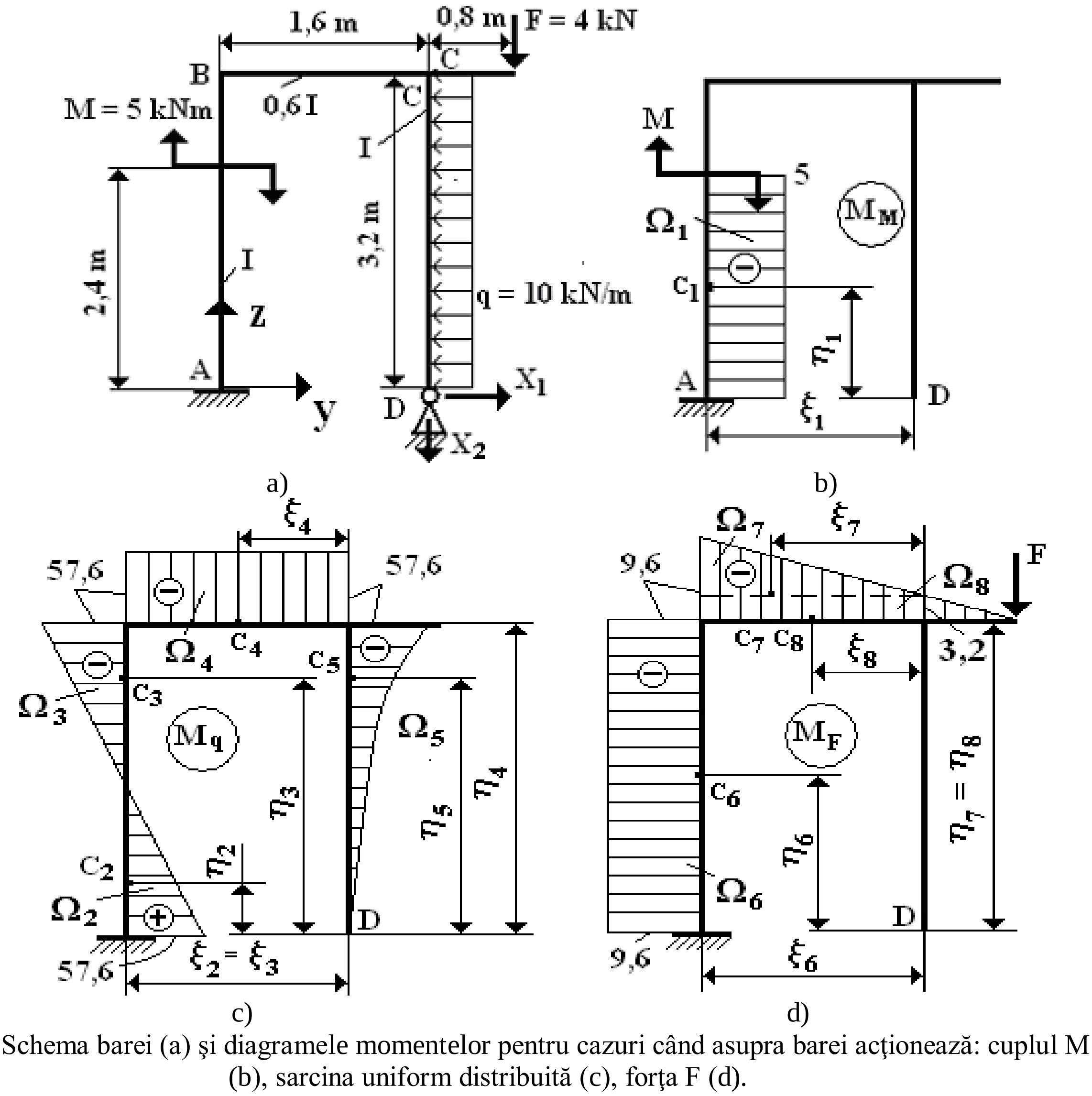
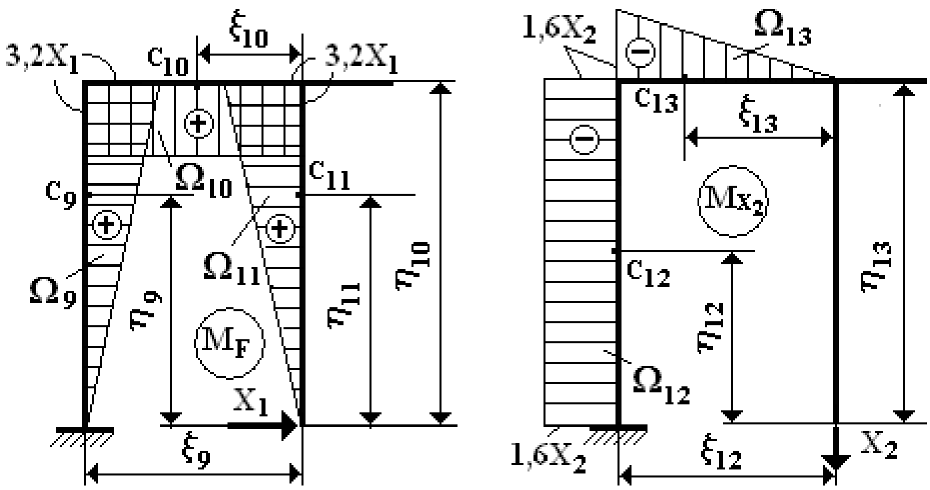


Figura 2. Schema barei (a) şi diagramele momentelor pentru cazuri când asupra barei acţionează: cuplul M (b), sarcina uniform distribuită (c), forţa F (d).



a) b)

Figura 3.Diagramele momentelor pentru cazuri când asupra barei acţionează reacţiunile X_1 (a) şi X_2 (b).

unde $S^{Dz}_{MAB}, S^{Dz}_{MBC}, S^{Dz}_{MCD}$ sunt momentele statice ale diagramei momentelor faţă de axa verticală care trece prin punctul D.

Deoarece $u^z_D = u^z_A = 0;\ \theta_A = 0;$ din (1) reiese:

$$-S^{Dz}_{MAB}/EI_1 - S^{Dz}_{MBC}/EI_2 - S^{Dz}_{MCD}/EI_1 = 0;$$

Sau $-S^{Dz}_{MAB}/EI_1 - S^{Dz}_{MBC}/0{,}6EI_1 - S^{Dz}_{MCD}/EI_1 = 0$

$$\Rightarrow S^{Dz}_{MAB} + S^{Dz}_{MBC}/0{,}6 + S^{Dz}_{MCD} = 0 \Rightarrow$$

Momentele statice se exprimă prin produsul dintre aria diagramei Ω_i şi distanţa η_i dintre centrul de greutate a suprafeţei cu aria Ω_i şi axa verticală prin punctul D.

$$\begin{gathered}\Omega_1\xi_1 + \Omega_2\xi_2 + \Omega_3\xi_3 + \Omega_6\xi_6 + \Omega_9\xi_9 + \\ + \Omega_{12}\xi_{12} + (\Omega_4\xi_4 + \Omega_7\xi_7 + \Omega_8\xi_8 + \\ + \Omega_{10}\xi_{10} + \Omega_{13}\xi_{13})/0{,}6 + \Omega_5\xi_5 + \Omega_{11}\xi_{11} = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-5\cdot 2{,}4\cdot 1{,}6 + (1/2)\cdot 57{,}6\cdot 1{,}6\cdot 1{,}6 - \\ -(1/2)\cdot 57{,}6\cdot 1{,}6\cdot 1{,}6 - 9{,}6\cdot 3{,}2\cdot 1{,}6 + \\ +(1/2)\cdot 3{,}2X_1\cdot 3{,}2\cdot 1{,}6 - 1{,}6X_2\cdot 3{,}2\cdot 1{,}6 + \\ +(-57{,}6\cdot 1{,}6\cdot 0{,}8 - (1/2)\cdot(9{,}6-3{,}2)\cdot \\ \cdot 1{,}6\cdot\frac{2}{3}\cdot 1{,}6 - 3{,}2\cdot 1{,}6\cdot(1/2)\cdot 1{,}6 + \\ +3{,}2X_1\cdot 1{,}6\cdot(1/2)1{,}6 - (1/2)\cdot 1{,}6X_2\cdot 1{,}6\cdot \\ \cdot(2/3)\cdot 1{,}6)/0{,}6 - (1/3)\cdot 57{,}6\cdot 3{,}2\cdot 0 + \\ +(1/2)3{,}2X_1\cdot 3{,}2\cdot 0 = 0\end{gathered}$$

$$15X_1 - 10{,}5X_2 = 207 \qquad (14)$$

$$\begin{gathered}u^y_D = u^y_A + \theta_A(z_D - z_A) - S^{Dy}_{MAB}/EI_1 - \\ - S^{Dy}_{MBC}/EI_2 - S^{Dy}_{MCD}/EI_1\end{gathered} \qquad (15)$$

Deoarece $u^y_D = u^y_A = 0;\ \theta_A = 0;$ din (3) obţinem:

$$-S^{Dy}_{MAB}/EI_1 - S^{Dy}_{MBC}/EI_2 - S^{Dy}_{MCD}/EI_1 = 0$$

$$-S^{Dy}_{MAB}/EI_1 - S^{Dy}_{MBC}/0{,}6EI_1 - S^{Dy}_{MCD}/EI_1 = 0$$

$$\Rightarrow S^{Dy}_{MAB} + S^{Dy}_{MBC}/0{,}6 + S^{Dy}_{MCD} = 0;\Rightarrow$$

$$\begin{gathered}\Omega_1\eta_1 + \Omega_2\eta_2 + \Omega_3\eta_3 + \Omega_6\eta_6 + \Omega_9\eta_9 + \\ + \Omega_{12}\eta_{12} + (\Omega_4\eta_4 + \Omega_7\eta_7 + \Omega_8\eta_8 + \Omega_{10}\eta_{10} + \\ + \Omega_{13}\eta_{13})/0{,}6 + \Omega_5\eta_5 + \Omega_{11}\eta_{11} = 0\end{gathered}$$

unde η_i este distanţa dintre centrul de greutate al ariei şi axa orizontală care trece prin punctul D.

$$\begin{gathered}-5\cdot 2{,}4\cdot(-2{,}4)/2 + (1/2)\cdot 57{,}6\cdot 1{,}6\cdot \\ \cdot(-1{,}6)/3 - (1/2)\cdot 57{,}6\cdot 1{,}6\cdot(-1{,}6 - \\ -(2/3)\cdot 1{,}6) - 9{,}6\cdot 3{,}2\cdot(-(1/2)\cdot 3{,}2) + \\ +(1/2)\cdot 3{,}2X_1\cdot 3{,}2\cdot(-(2/3)\cdot 3{,}2) - \\ -1{,}6X_2\cdot 3{,}2\cdot(-(1/2)\cdot 3{,}2) + (-57{,}6\cdot 1{,}6\cdot \\ \cdot(-3{,}2) - (1/2)\cdot(9{,}6-3{,}2)\cdot 1{,}6\cdot(-3{,}2) - \\ -3{,}2\cdot 1{,}6\cdot(-3{,}2) + 3{,}2X_1\cdot 1{,}6\cdot(-3{,}2) - \\ -(1/2)\cdot 1{,}6X_2 1{,}6\cdot(-3{,}2))/0{,}6 - (1/3)\cdot \\ \cdot 57{,}6\cdot 3{,}2\cdot(-(3/4)\cdot 3{,}2) + (1/2)\cdot 3{,}2X_1 3{,}2\cdot \\ \cdot(-(2/3)\cdot 3{,}2) = 0\end{gathered}$$

$$49{,}1X_1 - 15X_2 = 855 \qquad (16)$$

Din ecuaţiile (14) şi (16) obţinem:

$$X_1 = 20{,}14\ kN,\quad X_2 = 9{,}06\ \text{kN}.$$

Folosirea interpretărilor lui Marina simplifică rezolvarea problemelor static nedeterminate.

Bibliografie

1. Marina V., Savcenco E. *O nouă metodă de calcul al deplasărilor. Editura U.T.M., Chişinău, 1998.*

Aprobat spre publicare: 03.05.2006