

UNE EXTENSION DE LA MÉTHODE KÀRMÀN-POHLHAUSEN AU CAS D'UNE PAROI POREUSE

D. Popescu

Université Technique "Gh. Asachi" Iassy

INTRODUCTION

Les équations qui décrivent l'écoulement dans la couche limite laminaire sont les équations Prandtl. La méthode Kàrmàn-Pohlhausen résout les équations Prandtl, mais peut être utilisée seulement pour les parois lisses.

Cet article présente une nouvelle méthode pour l'étude de l'écoulement dans la couche limite laminaire au cas d'une paroi poreuse, en utilisant une loi de distribution des vitesses, représentée par un polynôme qui dépend de la vitesse à travers la paroi.

1. LES ÉQUATIONS POUR L'ÉTUDE DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE PLAN AU CAS D'UNE PAROI POREUSE

Soit l'écoulement stationnaire et plan d'un fluide incompressible au long d'une paroi poreuse; soit un point de la paroi où l'écoulement n'est pas décollé; soit un système d'axes de coordonnées, l'axe Ox au long de la paroi, l'axe Oy normale à la paroi (figure 1). Les composantes de la vitesse sont u et v . Dans l'écoulement libre, on peut appliquer les équations des fluides non visqueux (équation Euler):

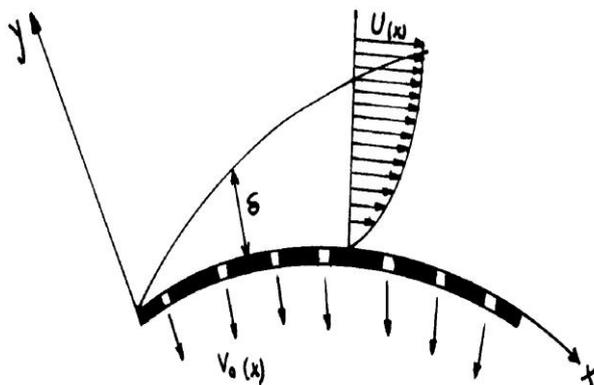


Figure 1. Axes de coordonnées

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

Dans la couche limite, les équations Prandtl sont:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

dans le domaine $D \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y < \delta\}$

$$u|_{x=0} = u_I(y) \quad (5)$$

$$u=0, \quad v=v_0 \quad ; \quad y=0 \quad (6)$$

$$u=U(x) \quad ; \quad y=\delta \quad (7)$$

où les conditions sur la frontière sont:

- $U(x)$ - la vitesse à l'extérieur de la couche limite
- u_I - la vitesse dans la section initiale
- ν - coefficient de viscosité cinématique
- δ - l'épaisseur de la couche limite
- v_0 - la vitesse à travers la paroi
($v_0 < 0$ pour aspiration, $v_0 > 0$ pour injection)

L'étude de la couche limite peut être faite en utilisant les équations sous forme intégrale:

$$\int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{dU}{dx} \right] dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad (8)$$

où

$$v = v_0 - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \text{ contrainte tangentielle à la paroi}$$

L'équation de l'impulsion dans la couche limite laminaire d'une paroi perméable [2], [7]:

$$\delta_1 U \frac{dU}{dx} + \frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) - v_0 U = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (9)$$

où

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy \text{ épaisseur de déplacement}$$

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy \text{ épaisseur de quantité de mouvement}$$

Équation de l'énergie dans la couche limite laminaire d'une paroi perméable [2], [7]:

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) - v_0 U^2 = 2\nu \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \quad (10)$$

où

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u^2}{U_\infty^2} \right) dy \text{ épaisseur d'énergie cinétique}$$

L'étude de la couche limite avec les équations Prandtl peut être fait jusqu'au point de décollement. Lors du décollement le rotationnel de la vitesse pénètre à partir de la couche limite à l'intérieur du fluide, et ses équations ne peuvent plus décrire l'écoulement. Les conditions d'existence de la couche limite sont:

$$u > 0 \text{ pour } y > 0 \text{ et } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial y} > 0 \quad (11)$$

R. Schlichting [7] a étudié les équations Prandtl au voisinage de la paroi poreuse sur une ligne de courant $y=0$:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (12)$$

Dans la région de la paroi où la pression augmente $\left(\frac{dp}{dx} > 0 \right)$ l'absorption ($v_0 < 0$) modifie

l'allure du profil des vitesses à la paroi, ce que montre le déplacement du point de décollement vers l'aval.

En tenant compte de cette observation on peut identifier un important sujet de recherche: le control de la couche limite par absorption. Le débit qui travers la paroi est très petite, seulement les particules qui se trouvent près de la paroi sont absorbées.

La perturbation se manifeste strictement dans la couche limite, hors le fluide est parfait [2], [4], [7]. La distribution des pressions sur la frontière est la même pour la paroi perméable que pour la paroi lisse.

Les équations de la couche limite plane pour les parois poreuses ne sont pas faciles à résoudre par ce qu'ils ne sont pas liniers. Il y beaucoup de méthodes de résoudre ces équations. Pour quelques cas spéciaux, plaque semi-infinie poreuse avec injection ou absorption uniforme [1], [2], [4], [7] il y a des méthodes exactes. Pour des cas plus généraux il y a des méthodes approximatives: Tse-Fou-Zien [8], [9], Lisnicof [3], Cebeci-Smith [1].

Les dernières années se remarquent par des méthodes numériques qui sont de plus en plus précises. Les méthodes approximatives sont encore utilisées fréquemment grâce à de leur simplicité.

2. UNE MÉTHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE POUR LES PAROIS PÉRMEABLES

La méthode approximative présentée dans cet article est une extension de la méthode classique Kàrmàn - Pohlhausen après les modifications de T. Bohlen et H. Holstein. On essaie d'étudier avec une cette nouvelle méthode le cas de la paroi poreuse pour une vitesse absorption / injection qui n'est pas uniforme, l'écoulement ayant un gradient de pression. [5].

Pour que l'extension soit possible, on a fait des hypothèses: le débit a travers la paroi est négligeable, la vitesse $v_0(x)$ est petite par rapport à la vitesse du courant libre $U(x)$, l'écoulement extérieur n'est pas modifié par la vitesse, l'impulsion transversale est négligeable, la contrainte à la paroi ne dépend pas de la perméabilité.

Soit un fluide incompressible. L'équation de l'impulsion dans la couche limite laminaire d'une paroi perméable (9) peut être écrite sous la forme:

$$\delta_2(x)U \frac{dU}{dx} \left[2 + \frac{\delta_1(x)}{\delta_2(x)} \right] + U^2(x) \frac{d\delta_2}{dx} - \nu_0(x)U(x) = \frac{\tau_0(x)}{\rho} \quad (13)$$

On décrit le profil des vitesses $\frac{u(x)}{U(x)}$ dans

la couche limite par un polynôme de quatrième degré:

$$\frac{u(x)}{U(x)} = \phi(\eta) = a_0(x) + a_1(x)\eta + a_2(x)\eta^2 + a_3(x)\eta^3 + a_4(x)\eta^4 \quad (14)$$

où

$$\eta = \frac{y}{\delta}; \quad \text{pour } 0 \leq \eta \leq 1.$$

Si $\eta \geq 1$, $u=U$.

Pour calculer les coefficients a_i , $i=1...4$ on vérifie les conditions sur la frontière:

$$\eta=0, \quad \phi=0, \quad v=\nu_0 \quad (a)$$

$$\eta=0, \Rightarrow \nu_0 \frac{U}{\delta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \quad (b)$$

$$= U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{U}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0}$$

$$\eta=1, \quad \phi=1 \quad (c)$$

$$\eta=1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad (d)$$

$$\eta=1, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (e)$$

avec

$$\lambda = -\frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}; \quad M = \frac{\nu_0(x)\delta}{\nu} \quad (15)$$

Après la résolution du système (a,b,c,d,e) on obtient:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{12 + \lambda}{6 + M} \\ a_2 = \frac{3(4M - \lambda)}{6 + M} \\ a_3 = \frac{-12 - 8M + 3\lambda}{6 + M} \\ a_4 = \frac{6 - \lambda + 3M}{6 + M} \end{cases} \quad (16)$$

Pour une paroi perméable, la distribution des vitesses dans la couche limite $\frac{u(x)}{U(x)} = \phi(\eta)$ devient:

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \frac{12\eta - 12\eta^3 + 6\eta^4}{6 + M} \\ &+ \frac{M}{6 + M} (12\eta^2 - 8\eta^3 + 3\eta^4) + \\ &+ \frac{\lambda}{6 + M} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \end{aligned} \quad (17)$$

On calcule les valeurs modifiées des paramètres

$$H_1 = \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{9 - 8M}{5(6 + M)} - \frac{\lambda}{20(6 + M)} \quad (18)$$

$$H_2 = \frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \phi(1 - \phi) d\eta;$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{6 + M} \left(\frac{\lambda}{20} + \frac{13M + 21}{5} \right) - \\ &- \frac{1}{(6 + M)^2} \left(\frac{734}{35} + M^2 \frac{393}{35} + \frac{\lambda^2}{252} \right) \\ &- \frac{1}{(6 + M)^2} \left(\frac{143M}{5} + \frac{\lambda M 53}{420} + \frac{71\lambda}{210} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$H_{12} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (20)$$

L'équation (13) multiplié par $\frac{\delta_2}{U\nu}$ devine:

$$\frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) + \frac{\delta_2 U}{\nu} \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\nu_0 \delta_2}{\nu} + \tau_0 \frac{\delta_2}{U\mu} \quad (21)$$

En remplaçant les notations (18) et (19) dans l'expression (21) on obtient:

$$\frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \left(2 + \frac{H_1}{H_2} \right) + \frac{U}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta_2^2}{\nu} \right) = \left(\frac{\nu_0 \delta}{\nu} + \frac{\tau_0 \delta}{U \nu} \right) H_2 \quad (22)$$

On note:

$$Z = \frac{\delta_2^2}{\nu} \quad (23)$$

et on obtient:

$$Z \frac{dU}{dx} (2 + H_{12}) + \frac{U}{2} \frac{dZ}{dx} = \left(\frac{12 + \lambda}{6 + M} + M \right) H_2 \quad (24)$$

La méthode Kàrmàn – Pohlhausen pour les parois imperméables résout l'équation:

$$Z \frac{dU}{dx} (2 + H_{12}) + \frac{U}{2} \frac{dZ}{dx} = \left(\frac{12 + \lambda}{6} \right) H_2 \quad (25)$$

Pour diverses valeurs du paramètre, en fonction du cas analysé on résout l'équation (25) et on peut calculer les paramètres qui décrivent la couche limite.

La méthode classique semble difficile d'appliquer pour résoudre l'équation (24). On remarque que cette équation dépend d'un seul paramètre par ce que les paramètres λ et M sont liés par la relation:

$$\lambda = - \frac{M^2 \nu}{\nu_0^2} \frac{dU}{dx}, \quad (26)$$

Cette remarque permet de résoudre l'équation (24) pour une vitesse libre $U(x)$ et une vitesse d'absorption $\nu_0(x)$ avec des méthodes numériques classiques.

3. CONCLUSIONS

1. Pour $\nu_0(x) = 0$ la relation (24) pour les parois poreuses devient la relation (25) et les paramètres $\phi(\lambda), H_1(\lambda), H_2(\lambda)$ sont les même que pour les parois imperméables [6].

2. Pour la couche limite sans gradient de pression $\frac{dU}{dx} = 0$, on obtient:

$$\phi(\eta) = \frac{6(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)}{6 + M} + \frac{M(12\eta^3 - 8\eta^3 + 3\eta^4)}{6 + M} \quad (27)$$

C'est le polynôme proposé par Tse-Fou Zien pour la plaque plane perméable [ZIE1, ZIE2].

3. L'équation obtenue (24) dépend d'un seul paramètre et peut être résolue par des méthodes classiques.

4. La méthode pour les parois poreuses est aussi simple que celle classique.

Bibliographie

1. **Cebecci, T., Smith, M.O.** *Analysis of Turbulent Boundary layers* // Academic Press, New York, San Francisco, London, 1974.
2. **Constantinescu, V.N.** *Dinamica fluidelor viscoase în regim laminar* // Ed. Academiei R.S.R., 1987.
3. **Lisnicof, A.L.** *Stratul limită laminar al suprafeței permeabile* // Jurnalul de inginerie fizică, vol.22, n.5, mai 1972.
4. **Panaïtescu, V.** *Teoria stratului limită și aplicații* // Rotaprint I.P.B., 1992.
5. **Popescu, D.** *Asupra unei metode aproximative de rezolvare a ecuațiilor stratului limită plan incompresibil pe pereți permeabili* // Termotehnică Românească '96, Ed. Gh. Asachi, Iași.
6. **Popescu, D.** *Cercetări privind utilizarea paletelor permeabile în construcția ventilatoarelor axiale* // Teză de doctorat, 2002.
7. **Schlichting, R.** *Grenzschicht Theorie* // Verlag G. Braun Karlsruhe, 1964.
8. **Zien, T.F.** *A New Integral Calculation of Skin Friction on Porous Plate* // AIAA Journal, vol. 9, no.7, july 1971.
9. **Zien, T.F.** *Skin Friction on Porous Surfaces Calculated by a Simple Integral Method* // AIAA Journal vol.10, n.10, 1972.