VECTORII PROPRII SISTEMELOR DISCRETE

Autor: Ion CREȚU
Conducător ştiinţific: conf. univ. Mihail BÎRCĂ

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se studiază schimbarea formelor proprii de vibrație ale sistemului discret în dependență de valorile maselor.*

Schema constructivă a clădirii este plană şi simetrică. Cadrul este calculat la diferite valori a raportului dintre masele concentrate. Construcția este alcătuită din stîlpi, grinzi şi planşee din beton armat monolit, clasa betonului C15, cu modulul de elasticitate $E = 23 \cdot 10^3 MPa$ *. Dimensiunile constructive ale elementelor şi clasa betonului rămîn neschimbate.*

Cuvinte cheie: *forme proprii de vibrație, parametrul oscilațiilor ce specifică frecvența (λ), frecvența oscilațiilor (ω), perioada oscilațiilor (T), vectorii proprii (a).*

1. Problemă de calcul:

Cadru cu o deschidere.

În cazul cadrelor etajate poate fi admisă ipoteza concentrării maselor la fiecare nivel, rezultă că cadrul din Fig.1 are 3 grade de libertate dinamică (G.L.D.).

Pentru acest cadru s-au determinat deplasările unitare pe direcțiile G.L.D., valorile proprii şi vectorii proprii în dependență de raportul valorii maselor.

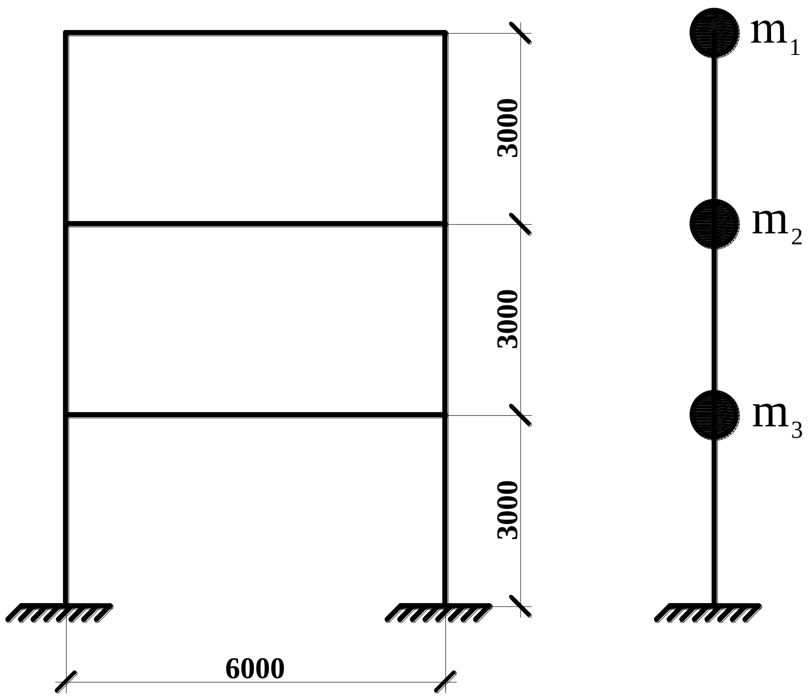


Fig. 1

Deplasările unitare au fost determinate prin metodele staticii structurilor şi au valorile:

$\delta_{11} = 0.199 \cdot 10^{-3} m/kN$ $\quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0.121 \cdot 10^{-3} m/kN$ $\quad \delta_{13} = \delta_{31} = 0.042 \cdot 10^{-3} m/kN$

$\delta_{22} = 0.094 \cdot 10^{-3} m/kN$ $\quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0.037 \cdot 10^{-3} m/kN$ $\quad \delta_{33} = 0.023 \cdot 10^{-3} m/kN$

2. Rezultatele obținute pentru cadrul cu o deschidere:

2.1. $m_1 = m_2 = m_3 = 10t$

$$\lambda_1 = 2.643 \cdot 10^{-3} s^2 \qquad \lambda_2 = 2.533 \cdot 10^{-4} s^2 \qquad \lambda_3 = 8.521 \cdot 10^{-5} s^2$$

$$\omega_1 = 19.453 rad / s \qquad \omega_2 = 62.832 rad / s \qquad \omega_3 = 108.331 rad / s$$

$$T_1 = 0.323 s \qquad T_2 = 0.1 s \qquad T_3 = 0.058 s$$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.734 \\ 0.321 \end{Bmatrix} \qquad a_2 = \begin{Bmatrix} -0.842 \\ 0.709 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \qquad a_3 = \begin{Bmatrix} 0.382 \\ -0.957 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

2.2. $2m_1 = 2m_2 = m_3 = 20t$

$$\lambda_1 = 2.809 \cdot 10^{-3} s^2 \qquad \lambda_2 = 3.77 \cdot 10^{-4} s^2 \qquad \lambda_3 = 1.07 \cdot 10^{-4} s^2$$

$$\omega_1 = 18.868 rad / s \qquad \omega_2 = 51.502 rad / s \qquad \omega_3 = 96.664 rad / s$$

$$T_1 = 0.333 s \qquad T_2 = 0.122 s \qquad T_3 = 0.065 s$$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.748 \\ 0.346 \end{Bmatrix} \qquad a_2 = \begin{Bmatrix} -0.958 \\ 0.356 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \qquad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.47 \\ 1.00 \\ -0.403 \end{Bmatrix}$$

2.3. $3m_1 = 3m_2 = m_3 = 30t$

$$\lambda_1 = 3.015 \cdot 10^{-3} s^2 \qquad \lambda_2 = 4.894 \cdot 10^{-4} s^2 \qquad \lambda_3 = 1.137 \cdot 10^{-4} s^2$$

$$\omega_1 = 18.212 rad / s \qquad \omega_2 = 45.203 rad / s \qquad \omega_3 = 93.779 rad / s$$

$$T_1 = 0.345 s \qquad T_2 = 0.139 s \qquad T_3 = 0.067 s$$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.762 \\ 0.37 \end{Bmatrix} \qquad a_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -0.106 \\ -0.83 \end{Bmatrix} \qquad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.495 \\ 1.00 \\ -0.241 \end{Bmatrix}$$

2.4. $4m_1 = 4m_2 = m_3 = 40t$

$$\lambda_1 = 3.228 \cdot 10^{-3} s^2 \qquad \lambda_2 = 5.929 \cdot 10^{-4} s^2 \qquad \lambda_3 = 1.171 \cdot 10^{-4} s^2$$

$$\omega_1 = 17.6 rad / s \qquad \omega_2 = 41.067 rad / s \qquad \omega_3 = 92.4 rad / s$$

$$T_1 = 0.357 s \qquad T_2 = 0.153 s \qquad T_3 = 0.068 s$$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.775 \\ 0.393 \end{Bmatrix} \qquad a_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.053 \\ -0.663 \end{Bmatrix} \qquad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.507 \\ 1.00 \\ -0.171 \end{Bmatrix}$$

2.5. $5m_1 = 5m_2 = m_3 = 50t$

$$\lambda_1 = 3.449 \cdot 10^{-3} s^2 \qquad \lambda_2 = 6.813 \cdot 10^{-4} s^2 \qquad \lambda_3 = 1.206 \cdot 10^{-4} s^2$$

$$\omega_1 = 17.028 rad / s \qquad \omega_2 = 38.312 rad / s \qquad \omega_3 = 91.061 rad / s$$

$$T_1 = 0.369 s \qquad T_2 = 0.164 s \qquad T_3 = 0.069 s$$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.788 \\ 0.414 \end{Bmatrix} \qquad a_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.155 \\ -0.542 \end{Bmatrix} \qquad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.514 \\ 1.00 \\ -0.132 \end{Bmatrix}$$

2.6. $6m_1 = 6m_2 = m_3 = 60t$

$$\lambda_1 = 3.696 \cdot 10^{-3} s^2 \qquad \lambda_2 = 7.581 \cdot 10^{-4} s^2 \qquad \lambda_3 = 1.206 \cdot 10^{-4} s^2$$

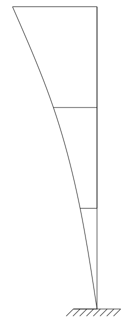
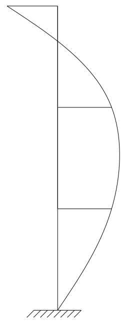
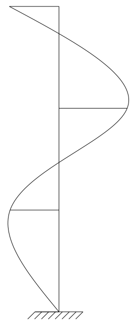
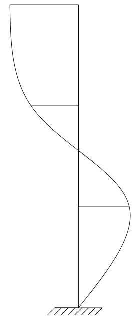
$\omega_1 = 16.448 rad/s$ $\qquad$ $\omega_2 = 36.319 rad/s$ $\qquad$ $\omega_3 = 91.061 rad/s$

$T_1 = 0.382 s$ $\qquad$ $T_2 = 0.173 s$ $\qquad$ $T_3 = 0.069 s$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.799 \\ 0.435 \end{Bmatrix} \qquad a_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.226 \\ -0.453 \end{Bmatrix} \qquad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.518 \\ 1.00 \\ -0.108 \end{Bmatrix}$$

În tabelul 1 sunt prezentate formele proprii de vibrație în dependență de raportul maselor concentrare pentru cadrul cu o deschidere :

Tabelul 1

Formele proprii de vibrație / Valoarea maselor concentrate	1	2	3	4
				
$m_1 = m_2 = m_3 = 10t$	+	+	+	-
$2m_1 = 2m_2 = m_3 = 20t$	+	+	+	-
$3m_1 = 3m_2 = m_3 = 30t$	+	+	+	-
$4m_1 = 4m_2 = m_3 = 40t$	+	-	+	+
$5m_1 = 5m_2 = m_3 = 50t$	+	-	+	+
$6m_1 = 6m_2 = m_3 = 60t$	+	-	+	+

3. Cadru cu 2 deschideri.

Aceleaşi calcule au fost efectuate pentru cadrul dat în Fig. 2.

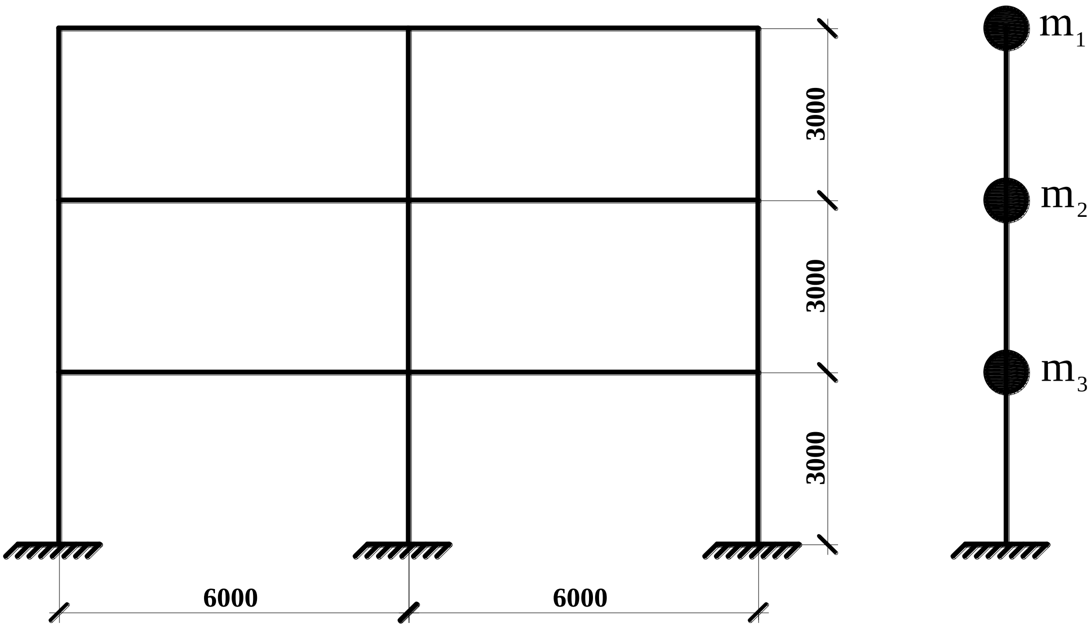


Fig. 2

Deplasările unitare au valorile:

$\delta_{11} = 0.1 \cdot 10^{-3} m/kN$ $\delta_{12} = \delta_{21} = 0.065 \cdot 10^{-3} m/kN$ $\delta_{13} = \delta_{31} = 0.027 \cdot 10^{-3} m/kN$

$\delta_{22} = 0.059 \cdot 10^{-3} m/kN$ $\delta_{23} = \delta_{32} = 0.026 \cdot 10^{-3} m/kN$ $\delta_{33} = 0.021 \cdot 10^{-3} m/kN$

4. Rezultatele obținute pentru cadrul cu 2 deschideri:

4.1. $m_1 = m_2 = m_3 = 10t$

$\lambda_1 = 1.583 \cdot 10^{-3} s^2$ $\lambda_2 = 1.621 \cdot 10^{-4} s^2$ $\lambda_3 = 6.082 \cdot 10^{-5} s^2$

$\omega_1 = 25.133 rad/s$ $\omega_2 = 78.54 rad/s$ $\omega_3 = 128.23 rad/s$

$T_1 = 0.25s$ $T_2 = 0.08s$ $T_3 = 0.049s$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.745 \\ 0.335 \end{Bmatrix} \quad a_2 = \begin{Bmatrix} -0.844 \\ 0.683 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \quad a_3 = \begin{Bmatrix} 0.394 \\ -0.978 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

4.2. $2m_1 = 2m_2 = m_3 = 20t$

$\lambda_1 = 1.686 \cdot 10^{-3} s^2$ $\lambda_2 = 2.433 \cdot 10^{-4} s^2$ $\lambda_3 = 7.668 \cdot 10^{-5} s^2$

$\omega_1 = 24.353 rad/s$ $\omega_2 = 64.114 rad/s$ $\omega_3 = 114.2 rad/s$

$T_1 = 0.258s$ $T_2 = 0.098s$ $T_3 = 0.055s$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.76 \\ 0.364 \end{Bmatrix} \quad a_2 = \begin{Bmatrix} -0.955 \\ 0.3 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \quad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.483 \\ 1.00 \\ -0.381 \end{Bmatrix}$$

4.3. $3m_1 = 3m_2 = m_3 = 30t$

$\lambda_1 = 1.819 \cdot 10^{-3} s^2$ $\lambda_2 = 3.235 \cdot 10^{-4} s^2$ $\lambda_3 = 7.944 \cdot 10^{-5} s^2$

$\omega_1 = 23.445 rad/s$ $\omega_2 = 55.603 rad/s$ $\omega_3 = 112.2 rad/s$

$T_1 = 0.268s$ $T_2 = 0.113s$ $T_3 = 0.056s$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.775 \\ 0.392 \end{Bmatrix} \quad a_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -0.045 \\ -0.82 \end{Bmatrix} \quad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.51 \\ 1.00 \\ -0.226 \end{Bmatrix}$$

4.4. $4m_1 = 4m_2 = m_3 = 40t$

$\lambda_1 = 1.958 \cdot 10^{-3} s^2$ $\lambda_2 = 3.895 \cdot 10^{-4} s^2$ $\lambda_3 = 8.235 \cdot 10^{-5} s^2$

$\omega_1 = 22.6 rad/s$ $\omega_2 = 50.671 rad/s$ $\omega_3 = 110.2 rad/s$

$T_1 = 0.278s$ $T_2 = 0.124s$ $T_3 = 0.057s$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.79 \\ 0.419 \end{Bmatrix} \quad a_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.11 \\ -0.648 \end{Bmatrix} \quad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.523 \\ 1.00 \\ -0.159 \end{Bmatrix}$$

4.5. $5m_1 = 5m_2 = m_3 = 50t$

$\lambda_1 = 2.116 \cdot 10^{-3} s^2$ $\lambda_2 = 4.414 \cdot 10^{-4} s^2$ $\lambda_3 = 8.521 \cdot 10^{-5} s^2$

$\omega_1 = 21.741 rad/s$ $\omega_2 = 47.6 rad/s$ $\omega_3 = 108.331 rad/s$

$T_1 = 0.289s$ $T_2 = 0.132s$ $T_3 = 0.058s$

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.803 \\ 0.445 \end{Bmatrix} \quad a_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.208 \\ -0.525 \end{Bmatrix} \quad a_3 = \begin{Bmatrix} -0.53 \\ 1.00 \\ -0.123 \end{Bmatrix}$$

4.6. $6m_1 = 6m_2 = m_3 = 60t$

$\lambda_1 = 2.28 \cdot 10^{-3} s^2$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 4.894 \cdot 10^{-4} s^2$ $\quad\quad$ $\lambda_3 = 8.521 \cdot 10^{-5} s^2$

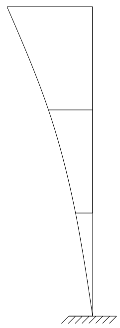
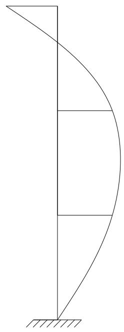
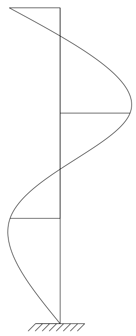
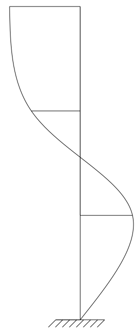
$\omega_1 = 20.944 rad/s$ $\quad\quad$ $\omega_2 = 45.203 rad/s$ $\quad\quad$ $\omega_3 = 108.331 rad/s$

$T_1 = 0.3s$ $\quad\quad$ $T_2 = 0.139s$ $\quad\quad$ $T_3 = 0.058s$

$$a_1 = \left\{\begin{matrix} 1.00 \\ 0.815 \\ 0.468 \end{matrix}\right\} \quad\quad a_2 = \left\{\begin{matrix} 1.00 \\ 0.273 \\ -0.435 \end{matrix}\right\} \quad\quad a_3 = \left\{\begin{matrix} -0.535 \\ 1.00 \\ -0.1 \end{matrix}\right\}$$

În tabelul 2 sunt prezentate formele proprii de vibrație în dependență de raportul maselor concentrare pentru cadrul cu 2 deschideri:

Tabelul 2

Formele proprii de vibrație / Valoarea maselor concentrate	1	2	3	4
				
$m_1 = m_2 = m_3 = 10t$	+	+	+	-
$2m_1 = 2m_2 = m_3 = 20t$	+	+	+	-
$3m_1 = 3m_2 = m_3 = 30t$	+	+	+	-
$4m_1 = 4m_2 = m_3 = 40t$	+	-	+	+
$5m_1 = 5m_2 = m_3 = 50t$	+	-	+	+
$6m_1 = 6m_2 = m_3 = 60t$	+	-	+	+

Se poate afirma că sistemul cu n G.L.D. are $2^{(n-1)}$ forme proprii de vibrație. Din tabelul 1 şi 2, observăm că pentru valorile numerice luate în calcul se realizează formele 1 şi 3, iar 2 şi 4 se exclud reciproc.

Concluzii:

1. Valorile raportului dintre masele concentrate influențează la obținerea tuturor formelor proprii de vibrație.
2. Numărul formelor proprii de vibrație poate fi calculat cu formula $2^{(n-1)}$, unde „n” este numărul G.L.D..
3. Acest rezultat trebuie să fie luat în considerație la proiectarea structurilor de rezistență în cazul acțiunilor seismice.

Bibliografie:

1. Aurel Stratan. *Dinamica structurilor şi inginerie seismică.* Timişoara, 2007.
2. Mihail Ifrim. *Dinamica structurilor şi inginerie seismică.* Bucureşti, 1984.
3. СниП II-7-81. *Строительство в сейсмических районах.*