O MODIFICARE A METODEI NEWTON CU ORDINUL AL TREILEA DE CONVERGENȚĂ

Victoria OBRINTEȚCHI

Departamentul Informatică și Ingineria Sistemelor, grupa IA-222, Facultatea Calculatoare Informatică și Microelectronică, Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

Autorul corespondent: Victoria OBRINTEȚCHI, e-mail: victoria.obrintetchi@iis.utm.md

Îndrumătorul/coordonatorul științific **Vasile MORARU**, prof. univ., dr.

Rezumat. *În această lucrare este descrisă și analizată o modificare a metodei clasice Newton pentru rezolvarea ecuațiilor neliniare univariate. Metoda se bazează pe tehnica dezvoltării în seria Taylor cu trunchierea după termenul al treilea și aproximarea derivatelor de ordinul doi a funcției de o variabilă reală prin derivatele de ordinul întâi. Metoda standard a lui Newton, în anumite condiții, este local convergentă și are gradul doi de convergență, adică eroarea la fiecare iterație este proporțională cu pătratul erorii de la iterația anterioară. Metoda modificată a lui Newton este de convergență cubică pentru același număr de evaluări a funcției și derivatei la fiecare iterație. Convergența către rădăcina simplă a ecuației neliniare este garantată atunci când aproximația inițială este aleasă în vecinătatea rădăcinii, în prealabil localizată. A fost elaborat un program de calculator și sunt prezentate câteva exemple numerice pentru a ilustra eficacitatea metodei prezentate pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice și transcendente.*

Cuvinte cheie: *ecuație neliniară, metoda Newton, convergența cubică, dezvoltare Taylor.*

Introducere

Metoda lui Newton este recunoscută ca una dintre cele mai eficiente și versatile tehnici pentru găsirea rădăcinilor unei ecuații neliniare. Dezvoltată inițial de matematicianul englez Isaac Newton în secolul al XVII-lea, această metodă a devenit un pilon fundamental în rezolvarea numerică a problemelor din diverse domenii, de la științele naturii și inginerie, până la economie și calculul financiar.

Fie dată ecuația $f(x) = 0$, unde $f(x)$ este o funcție derivabilă de variabila reală x. Metoda lui Newton este una din metodele efective ale analizei neliniare, fiind definită prin relația

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2, \cdots, \tag{1}$$

unde aproximația inițială x_0 este aleasă în vecinătatea rădăcinii x_*, în prealabil localizată. Metoda lui Newton în anumite condiții [1, 2] are ordinul doi de convergență (convergența pătratică), adică eroarea la fiecare iterație este proporțională cu pătratul erorii de la iterația anterioară. Dacă derivatele $f'(x)$ si $f''(x)$, sunt continue și păstrează un semn constant în vecinătatea rădăcinii x_*, atunci procesul (1) converge astfel încât la fiecare iterație numărul cifrelor semnificative corecte se dublează, adică dacă

$$|x_k - x_*| \leq 10^{-k}$$

atunci

$$|x_{k+1} - x_*| \leq C \times 10^{-2k}, 0 \leq C < \infty.$$

Formula iterativă a lui Newton (1) poate fi obținută din dezvoltarea funcției $f(x)$ în seria Taylor în vecinătatea punctului x_k și trunchierea după termenul al doilea.

Se pune problema extinderii metodei lui Newton în vederea obținerii unui șir convergent către rădăcina x_* de ordinul trei de convergență. În lucrarea de față, ne propunem să explorăm un astfel de algoritm cu convergență cubică.

Metoda Newton modificată și rata de convergență

Considerăm ecuația $f(x)=0$ care are o singură rădăcină în intervalul $[a,b]$. Se presupune că $f(x)$ este o funcție continuă de două ori derivabilă și $f'(x)\neq 0$ pentru $\forall x\in[a,b]$. Conform formulei lui Taylor pentru $\forall x,d\in\mathbb{R}$ avem

$$f(x_k+d)= f(x_k)+df'(x_k)+\frac{d^2}{2}f''(x_k)+O(d^2), \tag{2}$$

$$f'\left(x_k+\frac{d}{2}\right)=f'(x_k)+\frac{d}{2}f''(x_k)+O(d) \tag{3}$$

unde $O(t)$ – de acelaşi ordin de mărime t.

Din ultima relație (3), înmulțită cu d și formula (2) rezultă:

$$f(x_k+d)= f(x_k)+df'\left(x_k+\frac{d}{2}\right)+O(d^2), \tag{4}$$

Fie d_k rădăcina ecuației

$$f(x_k)+df'\left(x_k+\frac{d}{2}\right)=0. \tag{5}$$

Din continuitatea derivatei $f'(x)$ și faptului că $f'(x)\neq 0, \forall x\in[a,b]$, din (5) rezultă că

$$d_k=-\frac{f(x_k)}{f'\left(x_k+\frac{d_k}{2}\right)}, k=0,1,2,\cdots. \tag{6}$$

Astfel obținem metoda Newton modificată:

$$x_{k+1}=x_k+d_k \tag{7}$$

cu d_k definit de relația (6).

***Teoremă*.** Fie funcția $f(x)$are derivatele $f'(x)$ și $f''(x)$ care satisfac inegalitățile:

$$m=\min_{[a,b]}|f'(x)|>0, 0\leq\ M=\max_{[a,b}|f''(x)|<\infty. \tag{8}$$

Atunci metoda Newton modificată (7) converge către x_* oricare ar fi aproximarea iniţială x_0 suficient de apropiată de x_*. În plus, eroarea este evaluată prin

$$|x_{k+1}-x_*|\leq C|x_k-x_*|^3. \tag{9}$$

***Demonstrație*.** Ecuația (5) cu ajutorul căreia se determină corecția d_k o putem pune sub forma echivalentă $d=\varphi(x_k,d)$, unde

$$\varphi(x_k,d)=-\frac{f(x_k)}{f'\left(x_k+\dfrac{d}{2}\right)}.$$

Luând în considerație (8), se constată cu ușurință că pentru $\forall d$ se îndeplinește condiția [3]:

$$|\varphi'(x_k,d)|\leq\frac{M}{2m^2}|f(x_k)|.$$

De aici se trage concluzia că ecuația $d = \varphi(x_k, d)$ are o soluție unică d_k dacă x_k satisface inegalitatea

$$|f(x_k)| < \frac{2m^2}{M}.$$

Putem arăta că $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$. Într-adevăr, ecuația $f(x) = 0$ se poate scrie $d(x) = 0$, unde

$$d(x) = -f(x) - f'\left(x + \frac{d(x)}{2}\right).$$

Se verifică imediat că $d'(x_*) = -1$. Prin urmare șirul de iterare $x_{k+1} = x_k + d(x_k)$ converge către rădăcina unică a ecuației $f(x) = 0$.

Să evaluăm acum eroarea care se comite în aproximarea rădăcinii x_* cu x_{k+1}. Pentru aceasta, să observăm că putem scrie

$$f'\left(x_k + \frac{d_k}{2}\right) d_k = f'\left(x_{k-1} + \frac{d_{k-1}}{2}\right) d_{k-1} - [f(x_k) - f(x_{k-1})].$$

Conform cu teorema lui Lagrange avem

$$f'\left(x_k + \frac{d_k}{2}\right) d_k = \left[f'\left(x_{k-1} + \frac{d_{k-1}}{2}\right) - f'(x_{k-1})\right] d_{k-1} - \frac{1}{2} d_{k-1}^2 f''(\xi_1),$$

$$f'\left(x_k + \frac{d_k}{2}\right) d_k = \frac{1}{2}[f''(\xi_2) - f''(\xi_1)] d_{k-1}^2$$

unde $\xi_1 = x_{k-1} + \theta_1 d_{k-1}, \xi_2 = x_{k-1} + \theta_2 d_{k-1} / 2$, $0 \le \theta_1 \le 1$, $0 \le \theta_2 \le 1$.
Din cele de mai sus rezultă că, $|d_k| \le \lambda_k |d_{k-1}|^2$, unde

$$\lambda_k = \frac{|f''(\xi_2) - f''(\xi_1)|}{2m} \le \frac{L}{m}\left|\theta_1 - \frac{\theta_2}{2}\right| |d_{k-1}| = C|d_{k-1}|,$$

ceea ce ne arată că cel puțin pentru valori mari ale lui k, $|d_k| \le C|d_{k-1}|^3$. Teorema este demonstrată.

Algoritmul pentru metoda Newton Modificată

Pasul 1. Se alege aproximata inițială x_0 și precizia ε > 0.

Pasul 2. Se determină $d_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Dacă $|d_0| < \varepsilon$, atunci STOP, x_0 - soluția aproximativă. În caz contrar se ia $k = 0$, se calculează: $x_1 = x_0 + d_0$ și se trece la Pasul 3.

Pasul 3. $k = k + 1$,

$$d_k = -\frac{f(x_k)}{f'\left(x_k + \frac{d_{k-1}}{2}\right)}$$

Dacă $|d_k|$ < ε, STOP, x_k - soluția aproximativă, altfel se trece la Pasul 4.

Pasul 4. Se determină x_{k+1} = x_k+ d_k și se trece la Pasul 3.

Rezultate numerice

Pentru a compara performanța Metodei Newton modificate cu Metoda clasică Newton au fost utilizate unele funcții și valorile inițiale din lucrările [4], [5]. S-a considerat $\varepsilon = 10^{-12}$

Tabelul 1

Performanța Metodei modificate Newton

Funcția	**Aproximația inițială x_0**	**Numărul de iterații k**		**Rădăcina r**
		MN	MNM	
$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$	$x_0 = 3$	$k = 6$	$k = 4$	$r \approx 1{,}365230013414097$
$f_2(x) = x^6 - x - 1$	$x_0 = 0$ $x_0 = 3$	$k = 7$ $k = 10$	$k = 5$ $k = 7$	$r \approx -0{,}77808958678601$ $r \approx 1{,}34724138401519$
$f_3(x) = sin^2(x) - x^2 + 1$	$x_0 = -3$	$k = 6$	$k = 4$	$r \approx -1.4044916482153$
$f_4(x) = xe^{x^2} - sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$	$x_0 = -2$	$k = 8$	$k = 6$	$r \approx -1{,}207647827130919$
$f_5(x) = cos(x) - xe^x + x^2$	$x_0 = 2$	$k = 7$	$k = 5$	$r \approx 0{,}639154096332008$
$f_6(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$	$x_0 = 3{,}5$	$k = 14$	$k = 9$	$r \approx 3$

Pentru a observa performanța Metodei Newton Modificate, în Tab. 1 sunt prezentate numărul de iterații *k* folosite pentru Metoda Newton (MN) și pentru Metoda Newton Modificată (MNM), împreună cu rădăcinile aproximative *r* obținute pentru fiecare funcție.

Observăm că Metoda Newton modificată necesită mai puține iterații pentru a converge către rădăcina unei funcții decât metoda Newton. Aceasta arată că convergența metodei Newton modificate este mai rapidă în comparație cu metoda clasică Newton în ceea ce privește aproximarea rădăcinii.

Concluzii

În încheiere menționăm că pot fi obținute și alte metode [5, 6] sugerate de înlocuirea funcției $f(x)$ cu suma primilor trei termini din dezvoltarea Taylor.

Metoda modificată Newton este mai puțin sensibilă la alegerea valorilor inițiale și poate permite în unele cazuri o convergență mai rapidă către rădăcină. Metoda cere calculul valorilor funcției $f(x)$ și ale derivate $f'(x)$. Este important de menționat că pentru a compara performanța diferitor metode se realizează în funcție de caracteristicile specifice ale problemei date, precizia necesară și stabilirea algoritmului. În genere, Metoda modificată Newton oferă o alternativă eficientă și cu o precizie mai mare. Cu toate acestea, este util de luat în considerare și alte opțiuni pentru a găsi cea mai bună soluție în contextul necesar.

Prin urmare, atunci când alegeți o metodă de rezolvare a ecuațiilor neliniare, se recomandă de luați în considerare natura problemei și caracteristicile metodei pentru a obține cea mai bună soluție posibilă.

Referințe

[1] J. F. Traub. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Published by Prentice Hall, 1985.

[2] V. Moraru. *Metode numerice: manual*. Chișinău, Editura Tehnica UTM, 2024. -269 p.

[3] V. Moraru. *Numerical Methods of the Third Order Convergence*. Proceedings of the II International Conference on Microelectronics and Computer Science, October 30-31, 1997 (ICMCS-97), Chișinău, pp. 156-158.

[4] B. P. Sapkota, J.Jnawali. *New Variants of Newton's Method for Solving Nonlinear Equations*. European Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 16, no. 4, 2023, pp. 2419-2430.

[5] A. Goudjo, L. Kouye. *A New Modification of Newton Method with Cubic Convergence.* Advances in Pure Mathematics, 2021, 11, pp. 1-11.

[6] A. Zein. *A general family of fifth-order iterative methods for solving nonlinear equations.* European Journal of Pure and Applied Mathematics. vol. 16, no. 4, 2023, pp. 2323-2347.