SUBBUCLE CONSOLIDATE ŞI RELAŢIILE DE ECHIVALENŢĂ INDUSE DE ELE, I

Efrosinia URSU, Vasile URSU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Sunt introduse noțiunile de subbucle consolidate și sunt demostrate unele proprietăți ale lor, iar în final este demonstrată pentru bucle teorema generalizată Lagrange; în particular, s-a obţinut că: cardinalul oricărei bucle ciclice ce se conţine în nucleul de stânga (sau de dreapta) al buclei divide ordinul buclei, ordinul oricărui element* $x \in L$ *ce se conţine în nucleul de stânga (sau de dreapta) al buclei divide ordinul buclei şi altele.*

Cuvinte cheie: *buclă, subbuclă, subbuclă normală, subbuclă consolidată, echivalenţă.*

1. Vom menționa unele noțiuni principale care pot fi găsite în [1-3].

Buclă se numește o mulțime nevidă *L* împreună cu operațiile definite pe ea de înmulțire, împărțirea de stânga și de dreapta $\cdot, \backslash, /$, dacă există în *L* un element *e* pentru care $e \cdot x = x \cdot e = x$ și dacă

$$(x / y) \cdot y = y,\ \ y \cdot (y \backslash x) = y, \quad (x \cdot y) / y = y,\ y \backslash (y \cdot x) = y$$

pentru orice x, y și z din *L*. Elementul e se numește *unitate* a buclei *L*.

O submulțime *H* a buclei *L* se numește *subbuclă* a lui *L*¸ dacă ea este închisă în raport cu operațiile buclei *L*, adică pentru oricare două elemente x și y din *H* elementele $x \cdot y,\ x \backslash y$ și x / y deasemenea sunt din *H*. Altfel spus, *H* se numește subbuclă a lui *L*¸ dacă împreună cu operațiile buclei *L* este buclă. Simplu se arată că elementul unitatea al buclei *L* se conține în orice subbuclă a ei.

Subbucla *H* a buclei *L* se numește normală în *L*, dacă pentru orice x, y și z din *L* au loc relațiile:

$$xH = Hx,\ x \cdot yH = xy \cdot H,\ Hx \cdot y = H \cdot xy.$$

Fie *X* o mulțime nevidă și $X^2 = \{x, y\} |\ x, y \in X\}$ a doua putere carteziană a lui *X*. O submulțime ρ a mulțimei X^2 se numește *relație de echivalență* pe *X* dacă pentru orice $x, y, z \in X$ au loc:

$(x, x) \in \rho$ (reflexivitate):
$(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$ (simetrie);
$(x, y) \in \rho \,\&\, (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$ (tranzitivitate).

O relația de echivalență ρ pe o buclă *L* se numește *congruență,* dacă pentru orice perechi de elemente $(x, y), (z, t)$ din ρ perechile de elemente $(x \cdot z, y \cdot t), (x / z, y / t),\ (x \backslash z, y \backslash t)$ deasemenea aparțin lui ρ.

O mulțime *R* cu două operații binare $\vee$ și $\wedge$ definite pe ea se numește *latice,* dacă pentru orice elemente x, y și z din *R* au loc:

$x \vee x = x, x \wedge x = x$ (idempotentivitate);
$x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$ (comutativitate);
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (asociativitate;
$x \wedge (x \vee y) = x,\ x \vee (x \wedge y)$ (absorbtivitate).

Laticea *R* se numește:

modulară, dacă pentru orice x, y și z din *R*
$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = ((x \wedge y) \vee z) \wedge y$;

completă, dacă orice submulțime $A \subseteq R$ posedă în *R supremum* și *infimum,* notate respectiv cu $\vee A$ și $\wedge A$;

2. Fie *L* o subuclă și *H* o subbuclă a ei.

Definiţia 1 *Subbucla H a buclei L vom numi-o*

consolidată de stânga dacă $xH \cdot H = xH$ *pentru* $\forall x \in L$;

consolidată de dreapta dacă $H \cdot Hx = Hx$ *pentru* $\forall x \in L$;

consolidată dacă este consolidată de stânga şi de dreapta.

Propoziția 1 *Dacă H este o subbuclă consolidată de stânga (respectiv, de dreapta) a buclei L, atunci relaţia* ρ_H *(respectiv,* ρ'_H*) definită în L astfel*

$$x\rho_H y \Leftrightarrow x \setminus y \in H \tag{1}$$

(respectiv, $x\rho'_H y \Leftrightarrow y / x \in H$*)* (2)

este relaţie de echivalenţă pe L.

Demonstraţie. Pentru orice $x \in L$ avem $x \setminus x = e \in H$, ceea ce implică $x\rho_H x$. Deci ρ_H este o relaţie reflexivă. Pe baza lui (1) şi a faptului că *H* este consolidată de stânga, avem

$$x\rho_H y \Rightarrow x \setminus y \in H \Rightarrow y \in xH \Rightarrow (\exists h \in H)(y = xh) \Rightarrow yH = xh \cdot H = xH \Rightarrow x \in yH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \setminus x \in H \Rightarrow y\rho_H x.$$

Deci ρ_H este simetrică. Din nou, conform lui (1) şi faptului că *H* este consolidată de stânga, avem

$$x\rho_H y \,\&\, y\rho_H z \Rightarrow x \setminus y \in H \,\&\, y \setminus z \in H \Rightarrow y \in xH \,\&\, z \in yH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \in yH = xH \cdot H = xH \Rightarrow x \setminus z \in H \Rightarrow x\rho_H z$$

.

Deci ρ_H este tranzitivă. Prin urmare, ρ_H este o relaţie de echivalenţă pe *L*.

Analog se arată că, dacă *H* este o subbuclă consolidată de dreapta a buclei *L*, atunci ρ'_H este o relaţie de echivalenţă pe *L*.

Corolar 1 *Din (1.1) şi (1.2) rezultă* $\rho_L = L \times L, \rho_E = \Delta_L$, *unde* Δ_L *este realţia de egalitate in L.*

Propoziția 2 *Dacă* $H_i, i \in I$ *este o familie de subbucle absorbante de stânga (respectiv, de dreapta), atunci*

$$\rho_{\bigcap_{i\in I} H_i} = \bigcap_{i\in I} \upsilon_{H_i} \text{ (respectiv, } \rho'_{\bigcap_{i\in I} H_i} = \bigcap_{i\in I} \upsilon'_{H_i}\text{).}$$

Demonstraţie. Avem

$$(x, y) \in \rho_{\bigcap_{i\in I} H_i} \Leftrightarrow x \setminus y \in \bigcap_{i\in I} H_i \Rightarrow x \setminus y \in H_i$$

$$(\forall i \in I) \Rightarrow (x, y) \in \rho_{H_i} \ (\forall i \in I) \Rightarrow (x, y) \in \bigcap_{i\in I} \rho_{H_i},$$

ceea ce demonstrează prima egalitate din teoremă. Egalitatea a doua (dintre paranteze) se demonstrează analog.

Corolar 2 *Dacă H şi* H' *sunt subucle consolidate de stânga (respectiv, de dreapta) ale buclei L, atunci* $H \subseteq H' \Rightarrow \rho_H \subseteq \rho_{H'}$.

Într-adevăr,

$$H \subseteq H' \Rightarrow H \bigcap H' = H \Rightarrow \rho_H \bigcap \upsilon_{H'} = \rho_H \Rightarrow \rho_H \subseteq \upsilon_{H'}.\square$$

Propoziția 3 *Dacă H este o subbuclă consolidată a buclei L şi* ρ_H, *respectiv* ρ'_H *sunt relaţiile de echivalenţă definite de (1), respectiv de (2), atunci pentru orice* $x \in L$, *clasele de echivalenţă în raport cu* ρ_H *şi* ρ'_H *care conţin pe x sunt* $x\rho_H = xH$ *şi* $x\rho'_H = H \cdot x$.

Corolar 3 *Pentru mulţimile* L/ρ_H *şi* L/ρ'_H *avem*

$$L/\rho_H = \{xH \mid x \in L\},\ L/\rho'_H = \{Hx \mid x \in L\},$$

$$L = \bigcup_{x \in L} xH = \bigcup_{x \in L} Hx,$$

$$xH \bigcap yH \neq \varnothing \Rightarrow xH = yH,$$

$$Hx \bigcap Hy \neq \varnothing \Rightarrow xH = yH.$$

Corolar 4 *Mulţimile* L/ρ_H *şi* L/ρ'_H *conţin o singură subbuclă a lui L, şi anume pe H.*

Corolar 5. *Orice clasă din* L/ρ_H *sau din* L/ρ'_H *are cardinalul (puterea) egal cu ordinul lui H.*

Definiţia 2 *I. Relaţia* ρ_H, *definită pe L, se numeşte relaţie de echivalenţă la stânga indusă de subbucla consolidată de stânga H a buclei L,* xH *se numeşte clasă de echivalenţă la stânga a lui* $x \in L$ *în raport cu H,* L/ρ_H *se numeşte mulţimea cât sau factor la stânga a lui L în raport cu H.*
II. Relaţia ρ'_H, *definită pe L, se numeşte relaţie de echivalenţă la dreapta indusă de subbucla consolidată de dreapta H a buclei L,* Hx *se numeşte clasă de echivalenţă la dreapta a lui* $x \in L$ *în raport cu H,* L/ρ'_H *se numeşte mulţimea cât sau factor la dreapta a lui L în raport cu H.*

Pentru orice element *x* al buclei *L* vom nota cu x^{-1} şi ${}^{-1}x$ elementele definite de egalităţile $x^{-1} \cdot x = e, x \cdot {}^{-1}x = e$.

Definiţia 3 *Fie L o buclă şi H o subbuclă consolidată de dreapta (respectiv, de stânga) a sa. Cardinalul (puterea) mulţimii* L/ρ_H *(respectiv,* L/ρ'_H*) se numeşte indicele de dreapta (respectiv, stânga) al lu H în L şi senotează cu* $|L:H|$ *(respectiv,* $|L:H|'$*).*

Propoziția 4 *Dacă L este o buclă şi H este o subbuclă care verifică condiţiile:*

$$x \cdot yH = xy \cdot H \tag{3}$$

şi

$$Hx \cdot y = H \cdot xy \tag{4}$$

pentru orice $x, y \in L$, *atunci H este consolidată şi indicele ei de dreapta coincide cu indicele ei de stânga în L, adică* $|L/\rho_H| = |L/\rho'_H|$.

Propoziţia 5 *Fie L o buclă, H o subbuclă consolidată de stânga (respectiv, de dreapta) şi K o subbuclă care verifică condiţia (3) (respectiv, (4)) din Teorema 4. Dacă* $K \subseteq H$ *, atunci*

$$|L:K| = |L:H| \cdot |H:K| \tag{1.3}$$

Corolar 6 (Teorema lui Lagrange generalizată) *Dacă H este o subbuclă consolidată de stânga sau de dreapta a lui L, atunci* $|L| = |L:H| \cdot |H|$.

În orice buclă *L* nucleul de stânga $R_s(L)$, nucleul de dreapta $R_d(L)$ şi nucleul de mijloc $R_m(L)$ ale lui *L* sunt definite astfel:

$$R_s(L) = \{a \in L \mid ax \cdot y = a \cdot xy \ \ pentu\ \forall x, y \in L\}$$

$$R_d(L) = \{a \in L \mid x \cdot ya = xy \cdot a \ \ pentu\ \forall x, y \in L\}$$

$$R_m(L) = \{a \in L \mid x \cdot ay = xa \cdot y \ \ pentu\ \forall x, y \in L\}$$

Intersecţia acestor nuclee

$$R(L) = R_s(L) \bigcap R_d(L) \bigcap R_m(L)$$

se numeşte nucleul buclei *L*. Evident că centrul buclei *L* este mulţimea

$$Z(L) = \{a \in L \mid a \in R,\ \ a \cdot x = x \cdot a \ \ pentru\, orice\, x \in L\}.$$

Corolar 7 *Cardinalul oricărei bucle ciclice ce se conţine în nucleul* N_e *de stânga al buclei L divide ordinul lui L.*

Corolar 8 *Orinul oricărui element* $x \in L$, *care se conţine în nucleul de stânga sau de dreapta al buclei L, divide ordinul lui L.*

Această afirmaţie rezultă din faptul că orice element din nucleul buclei *L* generează o subbuclă asociativă ciclică (deci, grup ciclic) conţinută în nucleu. Deci, această subbuclă ciclică va fi consolidată de stânga sau de dreapta. Acum afirmaţia rezultă din Corolar 7, deoarece ordinul grupului ciclic generat de *x* coincide cu ordinul lui *x*.

Corolar 9 *În orice buclă diasociativă L sunt adevărate afirmaţiile:*

Pentru orice $x \in L$ *ordinul lui x divide ordinul lui L;*

Dacă L este o buclă finită, atunci $a^{|L|} = e$;

Dacă ordinul lui L este un număr prim, atunci L este grup ciclic.

Într-adevăr, dacă bucla *L* este diasociativă, adică orice două elemente generează un grup, atunci orice subbuclă generată în *L* de un singur element este consolidată. Atunci a) şi b) sunt evidente. Fie $|L| = p$ şi *p* este un număr prim, iar *a* – un element neunitate din *L*. Subbucla ciclică *H* denerată de elementul *a* în *L* este consolidată. Atunci, conform Corolarului 7, avem $|L| = |L:H| \cdot |H|$ deci $p = |L:H| \cdot |H|$. De aici obţinem $|H| = p$ şi $|L:H| = 1$, dar atunci $L = H$. □