Cu privire la poziția reciprocă a unei drepte și a unei suprafețe de ordinul doi și a determinării distanței minime dintre ele

BALTAG Iurie

Fie date ecuațiile parametrice ale unei drepte în spațiu și ecuația unei suprafețe de ordinul doi:

$$x = l_1 t + x_1; \;\; y = l_2 t + y_1; \;\; z = l_3 t + z_1 \tag{1}$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d = 0 \tag{2}$$

Se consideră așa valori ale coeficienților ecuației (2), pentru care această ecuație determină în spațiu o suprafață reală de ordinul doi (sferă, elipsoid, paraboloid, hiperboloid, suprafață conică sau cilindrică).

Se examinează următoarele probleme:

(1) Poziția reciprocă a unei drepte și a unei suprafețe de ordinul doi în spațiu.

(2) Determinarea distanței minime de la o dreaptă până la o sferă.

(3) Determinarea distanței minime de la o dreaptă până la un paraboloid.

(1) Pentru a determina poziția reciprocă a dreptei și a suprafeței date înlocuim expresiile pentru x, y și z din (1) în ecuația (2) și obținem o ecuație de gradul doi în raport cu necunoscuta t. În dependență de numărul soluțiilor reale ale acestei ecuații sunt posibile următoarele cazuri:

a) dreapta și suprafața au două puncte comune; b) au un singur punct comun; c) nu au nici un punct comun (nu se intersectează); d) dreapta aparține suprafeței, în acest caz substituind expresiile pentru x, y și z din (1) în ecuația (2) obținem o identitate, adică o egalitate adevărată pentru orice t real.

Pentru a afla punctele de intersecție ale dreptei cu suprafața dată, în cazurile a) sau b), înlocuim soluțiile ecuației (valorile parametrului t) în ecuațiile (1) și determinăm coordonatele acestor puncte.

(2) Fie dată ecuația unei drepte determinată de ecuațiile (1) și a unei sfere de rază R cu centrul într-un punct dat C. Fie, că dreapta nu are nici un punct comun cu sfera dată.

Pentru a afla distanța minimă dintre dreaptă și sferă deducem mai întâi ecuația planului π ce trece prin centrul sferei perpendicular pe dreapta dată. Vectorul director al dreptei poate fi luat în calitrate de vector normal al acestui plan.

Apoi aflăm punctul M de intersecție al planului π cu dreapta dată, înlocuind expresiile pentru x, y, z din ecuațiile parametrice ale dreptei în ecuația acestui plan. Distanța căutată va fi $h = |MC| - R$.

(3) 3) Fie dat un paraboloid de ecuație $z = ax^2 + by^2 + c$ și o dreaptă dată de ecuațiile (1). Fie, că dreapta nu are nici un punct comun cu paraboloidul. Pentru a afla distanța minimă dintre ele luăm un punct arbitrar de pe paraboloid $M(x; y; z)$ și un punct arbitrar de pe dreaptă $N(x'; y'; z')$ și alcătuim funcția pătratului distanței dintre aceste puncte:

$$\begin{aligned} F &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = \\ &= (l_1 t + x_1 - x)^2 + (l_2 t + y_1 - y)^2 + (l_3 t + z_1 - ax^2 - by^2 - c)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

$F(t, x, y)$ este o funcție de trei variabile, pentru care trebuie să aflăm valoarea minimă. Aplicăm condiția necesară de extrem și obținem următorul sistem:

$$\begin{cases} F'_t = 0 \\ F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1(x' - x) + l_2(y' - y) + l_3(z' - z) = 0 \\ l_3 - 2al_1 x - 2bl_2 y = 0 \\ bx(l_2 t + y_1 - y) - ax(l_1 t + x_1 - x) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Din a doua și a treia ecuație a sistemului (4) exprimăm necunoscutele y și t prin x și înlocuim în prima ecuație, care devine o ecuație de gradul trei cu o singură necunoscută x.

Prin urmare, în dependență de coeficienții din ecuațiile dreptei și cei din ecuația paraboloidului, sistemul (4) determină cel puțin unul și cel mult trei puncte de extrem posibil.

Punctele obținute pot fi studiate la extrem cu ajutorul criterului lui Silvestru sau a altui criteriu.

Exemplu. Să se determine distanța minimă de la paraboloidul de ecuație $z = x^2 + y^2 + 1$ până la dreapta dată de ecuațiile parametrice $x = t;\ y = -t;\ z = 2t$.

Rezolvare. Determinăm poziția reciprocă a paraboloidului și dreptei date. Înlocuim în ecuația paraboloidului expresiile variabilelor din ecuațiile parametrice ale dreptei și obținem o ecuație pătrată ce nu are soluții reale. Prin urmare, dreapta nu intersectează paraboloidul.

Funcția determinată de ecuația (3) va fi $F(t;x;y) = (t-x)^2 + (t+y)^2 + (2t - x^2 - y^2 - 1)^2$. Alcătuim pentru ea sistemul (4) și îl rezolvăm:

$$\begin{cases} 6t - x + y - 2x^2 - 2y^2 - 2 = 0 \\ 2 - 2x + 2y = 0 \\ yt + xt = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 0,\ y = x - 1 \\ 4x^2 - 4x + 5 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 0;\ y = x - 1 \\ t = 2/3 \end{cases} \end{array} \right)$$

Primul sistem nu are soluții reale, iar din al doilea determinăm punctul $P\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$. Aplicând criteriul lui Silvestru, ne convingem, că acest punct este un punct de minim al funcției F. Putem determina și punctele de pe paraboloid și de pe dreaptă, distanța dintre care este distanța minimă căutată: $M(1/2; -1/2; 3/2)$, $N(2/3; -2/3; 4/3)$, $|MN| = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Răspuns: $d = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

References

[1] Baltag I., Baltag Iu. Elemente de algebră liniară și geometrie analitică. Chișinău, 2008.

[2] Baltag Iu. Elemente de algebră liniară și vectorială. Chișinău, 2008.

[3] Chletenic D. Culegere de probleme la geometria analitică. Moscova, 1976.

[4] Șcerbațchi Ion Culegere de probleme de analiză matematică. Chișinău, 1996.

(BALTAG Iurie) Technical University of Moldova, Chisinau, Republic of Moldova

E-mail address: `iubaltag@mail.ru, iurie.baltag@mate.utm.md`