Hiperboloidul cu o pânză ca rețea algebrică

LEAH Ion

Printre cuadricele sau suprafeţele de ordinul doi, studiate în geometria analitică, două se evidenţiază în mod deosebit. Hiperboloidul cu o pânză H1 şi paraboloidul hiperbolic PH sunt suprafeţe riglate, chiar dublu riglate. Ne vom opri asupra cuadricei H1, determinatăe de ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Oricare plan, paralel planului *XOY*, intersectează H1 după o elipsă. Cea mai mică elipsă este la intersecţia $H1 \cap XOY$; ea se numeşte *elipsa colier*. Pe această suprafaţă există două familii de drepte L_1 şi L_2 astfel, încât 1) oricare două drepte dintr-o familie sunt neconcurente, şi 2) prin fiecare punct al suprafeţei trec două drepte, câte una din fiecare familie.

Oricare dreaptă din L_1, respectiv, din L_2, intersectează elipsa colier. Astfel, fiecare punct al elipsei colier determină câte o dreaptă din fiecare familie. Cu o mică excepţie, oricare două drepte din familii diferite se intersectează. Excepţie fac dreptele din familii diferite, care trec prin extremităţile unui diametru al elipsei colier. Dacă (x_0, y_0) şi $(-x_0, -y_0)$ sunt două puncte diametral opuse ale elipsei colier, atunci dreptele $d_1 \in L_1$, care trece prin punctul (x_0, y_0) şi $d_2 \in L_2$, care trece prin punctul $(-x_0, -y_0)$ nu se intersectează. Aceste constatări sugerează ideea de a examina cuadrica H1 ca o reţea algebrică [1].

O *reţea algebrică* este un sistem *N* de obiecte de două tipuri (linii şi puncte) cu o relaţie de incidenţă, dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii. Fie că mulţimea *L* a liniilor este divizată în trei clase disjuncte L_1, L_2 şi L_3. Atunci:

1) două linii din clase diferite sunt incidente unui singur punct;

2) oricare punct din *N* este incident exact cu câte o linie din fiecare clasă.

Pentru a deveni reţea algebrică, cuadricei H1 „îi lipsesc“ două lucruri: 1) intersecţia *oricăror* două drepte $d_1 \in L_1$ şi $d_2 \in L_2$; 2) clasa a treia de linii L_3.

Dacă două drepte $d_1 \in L_1$ şi $d_2 \in L_2$ trec prin puncte diametral opuse ale elipsei colier, vom considera intersecţia lor un punct, notat cu ∞. Din acest moment, oricare două drepte din L_1 şi L_2 vor avea un punct comun, finit sau infinit.

Oricărui număr real h îi corespunde elipsa, obţinută la intersecţia cuadricei H1 cu planul $z = h$. Oricare două plane distincte $z = h_1$ şi $z = h_2$ intersectează H1 după două elipse fără puncte comune. Vom adăuga planul $z = \infty$ şi, respectiv, elipsa din ∞, care va consta din toate punctele, obţinute la intersecţia dreptelor în ∞.

Acum, clasa L_3 de linii va consta din toate elipsele stabilite, inclusiv, elipsa din ∞. Oricare două linii din clase diferite se intersectează într-un singur punct (finit sau ∞). Condiţiile definiţiei unei reţele algebrice sunt îndeplinite.

Astfel, cuadrica $H1$ cu precizările de rigoare, a devenit o reţea algebrică.

References

[1] Белоусов, В. Д. Алгебраические сети и квазигруппы, I. In: Алгебраические сети и квазигруппы Штиинца, Кишинев, 1971.

(LEAH Ion) Universitatea Tehnică a Moldovei, Chişinău, Republica Moldova
E-mail address: ion.leah@mate.utm.md